জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০১৩ শিক্ষাবর্ষ
থেকে নবম-দশম শ্রেণির পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

উচ্চতর গণিত

নবম–দশম শ্রেণি

রচনায়

ড. অমূল্য চন্দ্র মণ্ডল

ড. মোঃ আব্দুস ছামাদ

ড. মোঃ আব্দুল হালিম

ড. শাহাদৎ আলি মল্লিক

সম্পাদনায়

ড. মোঃ আবদুল মতিন

ড. মোঃ আইনুল ইসলাম

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা
কর্তৃক প্রকাশিত

পরীক্ষামূলক সংস্করণ

প্রথম প্রকাশ : অক্টোবর- ২০১২
পুনর্মুদ্রণ : সেপ্টেম্বর, ২০১৩

পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে সমন্বয়ক

মোঃ নাসির উদ্দিন

মোঃ রজব আলী মিঞা

কম্পিউটার কম্পোজ

লেজার স্ক্যান লিমিটেড

প্রচ্ছদ

সুদর্শন বাছার
সুজাউল আবেদীন

চিত্রাঙ্কন

তোহ্‌ফা এন্টারপ্রাইজ

ডিজাইন

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণ : করতোয়া প্রিন্টার্স এন্ড পাবলিকেশন্স, বিসিক শিল্পনগরী, বগুড়া।

প্রসঙ্গ-কথা

শিক্ষা জাতীয় জীবনের সর্বতোমুখী উন্নয়নের পূর্বশর্ত। আর দ্রুত পরিবর্তনশীল বিশ্বের চ্যালেঞ্জ মোকাবেলা করে বাংলাদেশকে উন্নয়ন ও সমৃদ্ধির দিকে নিয়ে যাওয়ার জন্য প্রয়োজন সুশিক্ষিত জনশক্তি। ভাষা আন্দোলন ও মুক্তিযুদ্ধের চেতনায় দেশ গড়ার জন্য শিক্ষার্থীর অন্তর্নিহিত মেধা ও সম্ভাবনার পরিপূর্ণ বিকাশে সাহায্য করা মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম লক্ষ্য। এছাড়া প্রাথমিক স্তরে অর্জিত শিক্ষার মৌলিক জ্ঞান ও দক্ষতা সম্প্রসারিত ও সুসংহত করার মাধ্যমে উচ্চতর শিক্ষার যোগ্য করে তোলাও এ স্তরের শিক্ষার উদ্দেশ্য। জ্ঞানার্জনের এই প্রক্রিয়ার ভিতর দিয়ে শিক্ষার্থীকে দেশের অর্থনৈতিক, সামাজিক, সাংস্কৃতিক ও পরিবেশগত পটভূমির প্রেক্ষিতে দক্ষ ও যোগ্য নাগরিক হিসেবে গড়ে তোলাও মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম বিবেচ্য বিষয়।

জাতীয় শিক্ষানীতি–২০১০ এর লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যকে সামনে রেখে পরিমার্জিত হয়েছে মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম। পরিমার্জিত এই শিক্ষাক্রমে জাতীয় আদর্শ, লক্ষ্য, উদ্দেশ্য ও সমকালীন চাহিদার প্রতিফলন ঘটানো হয়েছে, সেই সাথে শিক্ষার্থীদের বয়স, মেধা ও গ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী শিখনফল নির্ধারণ করা হয়েছে। এছাড়া শিক্ষার্থীর নৈতিক ও মানবিক মূল্যবোধ থেকে শুরু করে ইতিহাস ও ঐতিহ্য চেতনা, মহান মুক্তিযুদ্ধের চেতনা, শিল্প–সাহিত্য–সংস্কৃতিবোধ, দেশপ্রেমবোধ, প্রকৃতি-চেতনা এবং ধর্ম-বর্ণ-গোত্র ও নারী-পুরুষ নির্বিশেষে সবার প্রতি সমমর্যাদাবোধ জাগ্রত করার চেষ্টা করা হয়েছে। একটি বিজ্ঞানমনস্ক জাতি গঠনের জন্য জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে বিজ্ঞানের স্বতঃস্ফূর্ত প্রয়োগ ও ডিজিটাল বাংলাদেশের রূপকল্প–২০২১ এর লক্ষ্য বাস্তবায়নে শিক্ষার্থীদের সক্ষম করে তোলার চেষ্টা করা হয়েছে।

নতুন এই শিক্ষাক্রমের আলোকে প্রণীত হয়েছে মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক। উক্ত পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে শিক্ষার্থীদের সামর্থ্য, প্রবণতা ও পূর্ব অভিজ্ঞতাকে গুরুত্বের সঙ্গে বিবেচনা করা হয়েছে। পাঠ্যপুস্তকগুলোর বিষয় নির্বাচন ও উপস্থাপনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর সৃজনশীল প্রতিভার বিকাশ সাধনের দিকে বিশেষভাবে গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে। প্রতিটি অধ্যায়ের শুরুতে শিখনফল যুক্ত করে শিক্ষার্থীর অর্জিতব্য জ্ঞানের ইঙ্গিত প্রদান করা হয়েছে এবং বিচিত্র কাজ, নমুনা প্রশ্ন সংযোজন করে মূল্যায়নকে সৃজনশীল করা হয়েছে।

জ্ঞান–বিজ্ঞানের বিচিত্র গবেষণায় **'উচ্চতর গণিত'** বিষয়টির প্রয়োগ বিশ্বব্যাপী। বিশেষ করে পদার্থবিদ্যা, জ্যোতির্বিদ্যা ও মহাকাশ গবেষণায় উচ্চতর গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য। এছাড়া প্রাত্যহিক জীবনে বিচিত্র পরীক্ষা–নিরীক্ষা ও গবেষণায় উচ্চতর গণিত তাৎপর্যপূর্ণ অবদান রাখছে। একবিংশ শতকের বিজ্ঞানভিত্তিক বিশ্বের চ্যালেঞ্জ মোকাবেলায় উচ্চতর গণিত অধ্যয়ন অতীব গুরুত্বপূর্ণ। এসব দিক বিবেচনায় রেখে মাধ্যমিক স্তরে **'উচ্চতর গণিত'** শীর্ষক পাঠ্যপুস্তকটি প্রণয়ন করা হয়েছে। এ ক্ষেত্রে সর্বদাই শিক্ষার্থীদের বোধগম্যতাকে গুরুত্ব দিয়ে সহজ–সুন্দরভাবে পাঠ্যপুস্তকটি প্রণয়ন করার চেষ্টা করা হয়েছে।

একবিংশ শতকের অঙ্গীকার ও প্রত্যয়কে সামনে রেখে পরিমার্জিত শিক্ষাক্রমের আলোকে পাঠ্যপুস্তকটি রচিত হয়েছে। কাজেই পাঠ্যপুস্তকটির আরও সমৃদ্ধিসাধনের জন্য যেকোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসঙ্গত পরামর্শ গুরুত্বের সঙ্গে বিবেচিত হবে। পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নের বিপুল কর্মযজ্ঞের মধ্যে অতি স্বল্প সময়ে পুস্তকটি রচিত হয়েছে। ফলে কিছু ভুলত্রুটি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণগুলোতে পাঠ্যপুস্তকটিকে আরও সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে। বানানের ক্ষেত্রে অনুসৃত হয়েছে বাংলা একাডেমী কর্তৃক প্রণীত বানানরীতি।

পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, চিত্রাঙ্কন, নমুনা প্রশ্নাদি প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে যারা আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন তাঁদের ধন্যবাদজ্ঞাপন করছি। পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষার্থীদের আনন্দিত পাঠ ও প্রত্যাশিত দক্ষতা অর্জন নিশ্চিত করবে বলে আশা করি।

প্রফেসর মোঃ শফিকুর রহমান
চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

সেট ও ফাংশন

(Set and Function)

সেটের প্রাথমিক ধারণা মাধ্যমিক বীজগণিতে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে মাধ্যমিক বীজগণিতের অতিরিক্ত বিষয়বস্তু আলোচনা করা হলো :

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- সার্বিক সেট, উপসেট, পূরক সেট ও শক্তি সেট গঠন করতে পারবে।
- বিভিন্ন সেটের সংযোগ, ছেদ ও অন্তর নির্ণয় করতে পারবে।
- সেট প্রক্রিয়ার ধর্মাবলির যৌক্তিক প্রমাণ করতে পারবে।
- সমতুল সেট বর্ণনা করতে পারবে এবং এর মাধ্যমে অসীম সেটের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সেটের সংযোগের শক্তি সেট নির্ণয়ের সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভেনচিত্র ও উদাহরণের সাহায্যে তা যাচাই করতে পারবে।
- সেট প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে জীবনভিত্তিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সেটের সাহায্যে রিলেশন ও ফাংশন এর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবে।
- এক-এক ফাংশন, সার্বিক ফাংশন ও এক-এক সার্বিক ফাংশন উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বিপরীত ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবে।

১·১ সেট

বাস্তব জগত বা চিন্তা জগতের বস্তুর যেকোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলা হয়। যেমন, *Mathematics* শব্দটি a, c, e, h, i, m, s, t অক্ষরগুলোর সুনির্ধারিত সংগ্রহ। তাই এটি *Mathematics* শব্দের অক্ষরসমূহের সেট এবং প্রত্যেকটি অক্ষর ঐ সেটের উপাদান। সেটকে আমরা ইংরেজি বড় হাতের অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করি এবং এর উপাদানগুলো বন্ধনীর { } মাঝে আবদ্ধ করে উপাদানগুলোকে আলাদা করার জন্য কমা ব্যবহার করি। অর্থাৎ

$$M = \{a, c, e, h, i, m, s, t\}$$

আরও কয়েকটি উদাহরণ :

(ক) ১ম দশটি অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট 'F' দ্বারা বর্ণিত হলে : $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(খ) সপ্তাহের দিনগুলোর সেট D দ্বারা নির্দেশিত হলে, আমরা লিখতে পারি

D = {শনিবার, রবিবার, সোমবার, মঙ্গলবার, বুধবার, বৃহস্পতিবার ও শুক্রবার}

অথবা $D = \{x : x$ হলো সপ্তাহের দিনগুলোর নাম।}

কাজ : তালিকা পদ্ধতিতে লেখ :

(ক) বছরের ইংরেজি মাসগুলোর সেট

(খ) দক্ষিণ এশিয়ার দেশগুলোর সেট।

(গ) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

(ঘ) বাংলাদেশের সরকারি পার্কগুলোর সেট।

সার্বিক সেট

সার্বিক সেট (*Universal Set*) আলোচনার জন্য নিচের সেটগুলো বিবেচনা করি:
$P = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $5x \leq 16\}$
$Q = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 20\}$
এবং $R = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $\sqrt{x} \leq 2\}$, যা কেবল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ধারণ করে।
এখন $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট$\}$ বিবেচনা করি।
তাহলে P, Q এবং R হলো U এর উপসেট এবং U কে বলা হয় সার্বিক সেট।

নির্দিষ্ট সেটকে আলোচনাধীন সকল সেটের সার্বিক সেট বলা হয়।

উপসেট (*Subset*)

$P = \{1,2,3\}$, $Q = \{1,2,3,4\}$ এবং $R = \{1,2,3,4\}$
সেট বিবেচনা করলে দেখা যায় P এর প্রতিটি উপাদান R এর উপাদান, অর্থাৎ $x \in P \Rightarrow x \in R$.
P সেটটিকে R সেটের উপসেট বলা হয় এবং লেখা হয় $P \subseteq R$.
অনুরূপভাবে Q সেটের প্রতিটি উপাদান R সেটের উপাদান অর্থাৎ, $x \in Q \Rightarrow x \in R$
সুতরাং Q কে R সেটের উপসেট বলা হয় এবং লেখা হয় $Q \subseteq R$।
P ও Q সেটদ্বয় R সেটের উপসেট হওয়া সত্ত্বেও এদের মধ্যে পার্থক্য বিদ্যমান।
এখানে, উল্লেখ্য যে, $n(P) = 3$ এবং $n(R) = 4$, যেখানে $n(S)$ হচ্ছে S সেটের উপাদান সংখ্যা।
P কে R এর প্রকৃত উপসেট বলা হয় এবং লেখা হয় $P \subset R$.

যেকোনো সেট A এর জন্য

(i) $A \subseteq A$

(i) $\Phi \subseteq A$ (ফাঁকা সেট Φ যেকোনো সেটের উপসেট)

যদি A সেট, সসীম সেট B এর উপসেট হয় অর্থাৎ $A \subseteq B$ তখন $n(A) \leq n(B)$
যদি A সেট, সসীম সেট B এর প্রকৃত উপসেট অর্থাৎ $A \subset B$ তখন $n(A) < n(B)$.

দ্রষ্টব্য : $\not\subseteq$ চিহ্ন অর্থ উপসেট নয় এবং $\not\subset$ এর অর্থ প্রকৃত উপসেট নয়।

পূরক সেট (*Complement Set*)

বিবেচনা করা যাক $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$ এবং $P = \{1,2,3\}$। সেট $P' = \{x : 5x > 16\}$ সংজ্ঞায়িত করা হলো, যার কোনো উপাদান P সেটে নেই। সুতরাং $P' = \{4,5,6,.....\}$ এবং একে বলা হয় পূরক সেট।
তদ্রূপ, $Q = \{1,2,3,4\}$ সেটের জন্য পূরক সেট $Q' = \{5,6,7,........\}$.
যদি U সার্বিক সেট হয়, তবে P সেটের পূরক সেট $P' = \{x : x \in U x \notin P,\}$.

উদাহরণ ১। দেওয়া আছে $U = \{x : x$ পূর্ণসংখ্যা, $0 < x \leq 10\}$, $A = \{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা, $2x > 7\}$ এবং $B = \{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা, $3x < 20\}$ এখান থেকে (a) সেট A ও A' (b) সেট B ও B' এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

কোনটি সত্য বা মিথ্যা বল : *i)* $A' \subseteq B$, *ii)* $B' \subseteq A$, *iii)* $A \not\subset B$

সমাধান : $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$(a) A = \{x : 2x > 7\} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$

$\therefore A' = \{1,2,3\}$

$(b)\ B = \{x : 3x < 20\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\therefore B' = \{7,8,9,10\}$

$\therefore A' \subseteq B$ সত্য, $B' \subseteq A$ সত্য এবং $A \not\subset B$ সত্য

শক্তি সেট (*Power Set*)

কোনো সেট A এর সকল উপসেটের সেটকে A এর শক্তি সেট বা পাওয়ার সেট বলা হয় এবং একে $P(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন, $A = \{1,2,3\}$ হলে, A এর শক্তি সেট,

$P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

লক্ষণীয় যে, $P(A)$ এর উপাদানগুলো প্রত্যেকেই সেট A এর উপসেট।

দ্রষ্টব্য : $B \in P(A)$ বললে বুঝতে হবে $B \subseteq A$, কোনো আলোচনায় সার্বিক সেট U ধরা হলে, ঐ আলোচনায় বিবেচিত প্রত্যেক সেট $P(U)$ এর সদস্য।

যদি কোনো সেটের উপাদান সসীম হয়, ধরা যাক ঐ সেটে n সংখ্যক উপাদান আছে, তাহলে উক্ত সেটটির শক্তি সেটে 2^n সংখ্যক উপাদান থাকবে ।

কাজ :

১। দেওয়া আছে $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

$(a)\quad A = \{x : x \in U,\ 5x > 37\}$

$(b)\quad B = \{x : x \in U,\ x + 5 < 12\}$

$(c)\quad C = \{x : x \in U,\ 6 < 2x < 17\}$

$(d)\quad D = \{x : x \in U,\ x^2 < 37\}$

২। দেওয়া আছে $U = \{x : x \in Z^+, 1 \le x \le 20\}$.

নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(a) $A = \{x : x, 2$ এর গুণিতক$\}$ (b) $B = \{x : x, 5$ এর গুণিতক$\}$

(c) $C = \{x : x, 10$ এর গুণিতক$\}$

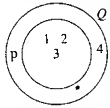
প্রদত্ত তথ্যের আলোকে নিচের কোনগুলো সত্য বা মিথ্যা বল

$C \subset A, B \subset A, C \subset B$

৩। যদি $A = \{a, b, c, d, e\}$ হয়, তবে $P(A)$ নির্ণয় কর।

ভেনচিত্র (*Venn Diagram*)

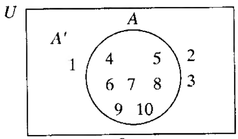
চিত্রে $P = \{1,2,3\}$ এবং $Q = \{1,2,3,4\}$ সেটের মধ্যে সম্পর্ক হলো $P \subseteq Q$.



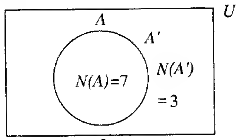
কোনো সেটের একাধিক উপসেটের মধ্যে এরূপ সম্পর্ক নির্দেশ করতে যে জ্যামিতিক চিত্র ব্যবহার করা হয়, তাই ভেনচিত্র।

সাধারণত আয়তক্ষেত্র দ্বারা সার্বিক সেট বোঝানো হয়। বৃত্তাকার বা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র উপসেট বোঝাতে ব্যবহার করা হয়। নিচের ভেনচিত্রে চিত্র-১ এ সার্বিক সেট $U = \{x : x$ পূর্ণসংখ্যা, $0 < x \leq 10\}$,

সেট $A = \{x : 2x > 7\}$ এবং $A' = \{x : 2x \leq 7\}$ দেখানো হলো।



চিত্র-১



চিত্র-২

প্রতিসেটের সংখ্যা তালিকাবদ্ধ করার পরিবর্তে চিত্র ২ এর অনুরূপ করে প্রতি সেটের উপাদানগুলো লিখতে পারি। যখন আমরা লিখি $n(A)$: অর্থাৎ আমরা অনুমান করি যে, A সসীম সেট।

যদি U সার্বিক সেট এবং A যেকোনো সেট তখন লিখতে পারি $n(A) + n(A') = n(U)$

উদাহরণ ২। দেওয়া আছে $U = \{x : 2 \leq x \leq 30, x \in Z^+\}$ এবং $P = \{x : x$ হলো 30 এর উৎপাদক$\}$

(a) P সেটের উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ

(b) P' সেটের বর্ণনা দাও

(c) $n(P')$ নির্ণয় কর

সমাধান : এখানে, $U = \{2, 3, ..., 29, 30\}$ (a) $P = \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

(b) $P' = \{x : x, 30$ এর উৎপাদক নয়$\}$

(c) $n(P') = n(U) - n(P)$

$= 29 - 7$

$\therefore \; n(P') = 22$

সেটের সংযোগ

ইংরেজি বর্ণমালা নিয়ে সার্বিক সেট ও দুইটি উপসেট যথাক্রমে

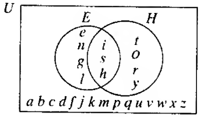
$E = \{e, n, g, l, i, s, h\}$

এবং $H = \{h, i, s, t, o, r, y\}$

(a) ভেনচিত্রে সার্বিক সেট U, E এবং H কে চিহ্নিত কর

(b) সেট $E \cup H = \{x : x \in E$ অথবা $x \in H\}$ এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : (a) ভেনচিত্র



(b) ভেনচিত্র হতে পাই, $\{x : x \in E$ অথবা $x \in H\}$
$= \{e, n, g, l, i, s, h, t, o, r, y\}$

লক্ষ করি : সেটটি $\{x : x \in E$ অথবা $x \in H\} = \{e, n, g, l, i, s, h, t, o, r, y\}$

E এবং H সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেট যাকে সংযোগ সেট বলা হয় এবং $E \cup H$ প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়

অর্থাৎ, $E \cup H = \{x : x \in E$ অথবা $x \in H\}$

উদাহরণ ৩। সার্বিক সেট ও দুইটি উপসেট দেওয়া হলো

$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$

$B = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$

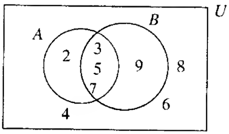
(a) A, B ও $A \cup B$ সেটের উপাদানগুলো তালিকাবদ্ধ কর :

(b) ভেনচিত্রে $A \cup B$ দেখাও।

(c) সেট $A \cup B$ ও সেট $(A \cup B')$ এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : $(a) A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 5, 7, 9\}$ এবং $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$

(b) ভেন চিত্রে $A \cup B$ দেখানো হলো



(c) $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\} = \{2, 3, 5, 7, 9\}$

$(A \cup B)' = \{4, 6, 8\}$

সেটের ছেদ

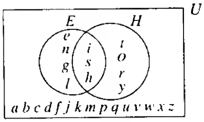
ইংরেজি বর্ণমালার অক্ষরগুলো সার্বিক সেট এবং দুইটি উপসেট

$E = \{e, n, g, l, i, s, h\}$ এবং $H = \{h, i, s, t, o, r, y\}$ সংজ্ঞায়িত করি।

তাহলে সেট $\{x : x \in E$ এবং $x \in H\} = \{i, s, h, \}$. যা E এবং H সেটের সকল সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত। এভাবে গঠিত সেটকে E ও H সেটের ছেদ সেট বলা হয় এবং $E \cap H$ লিখে প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ,

$E \cap H = \{x : x \in E$ এবং $x \in H\}$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,



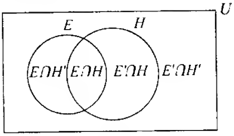
$E\cap H'=\{x : x\in E$ এবং $x\in H'\}=\{e,n,g,l\}$.

$E'\cap H=\{x : x\in E'$ এবং $x\in H\}=\{t,o,r,y\}$.

$E'\cap H'=\{x : x\in E'$ এবং $x\in H'\}$

$\quad = \{a,b,c,d,f,j,k,m,p,q,u,v,w,x,z\}$.

নিচের ভেনচিত্রে উপরের সেটগুলো দেখানো হলো :

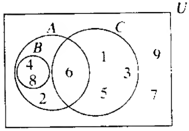


চিত্র

উদাহরণ ৪ : দেওয়া আছে $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{4,8\}$ এবং $C=\{1,3,5,6\}$

ভেনচিত্র অংকন কর (a) $A\cap B$ এবং $A\cap B'$

(b) $B\cap C$ এবং $B'\cap C'$



সমাধান : (a) যেহেতু $B\subseteq A$

$A\cap B=B=\{4,8\}$

$A\cap B'=A=\{2,6\}$

(b) $B\cap C=\{\}$

$B'\cap C'=B=\{2,7,9\}$

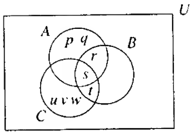
উক্ত উদাহরণ থেকে পাই $B\cap C=\{\}$ অতএব সেট B ও C কে বলা হয় নিশ্ছেদ সেট।

B ও C সেটদ্বয় নিশ্ছেদ $\Leftrightarrow B\cap C=\Phi$

উদাহরণ ৫। $U=\{p,q,r,s,t,u,v,w\}$, $A=\{p,q,r,s\}$, $B=\{r,s,t\}$ ও $C=\{s,t,u,v,w\}$

(a) $A\cap B$, $B\cap C$ এবং $C\cap A$ এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লিপিবদ্ধ কর এবং ভেনচিত্রে দেখাও

(b) $A\cap B\cap C$ এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :



সমাধান : (a) $A\cap B=\{r,s\}$

$B\cap C=\{s,t\}$

$C\cap A=\{s\}$

(b) $A\cap B\cap C=\{r,s\}\cap C=\{r,s\}\cap\{s,t,u,v,w\}$

$= \{s\}$

উদাহরণ ৬। দেওয়া আছে U সার্বিক সেট এবং $A\cap B=\Phi$ ভিন্ন ভিন্ন ভেনচিত্রে নিচের সেটগুলো আচ্ছাদিত কর:

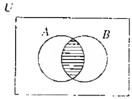
(a) $A\cap B$ (b) $A'\cap B$

(c) $A\cap B'$ (d) $A'\cap B'$

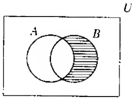
দেখাও যে, $n(A \cap B) + n(A' \cap B) + n(A \cap B') + n(A' \cap B') = n(U)$

সমাধান :

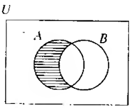
(a) $A \cap B$



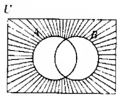
(b) $A' \cap B$



(c) $A \cap B'$



(d) $A' \cap B'$

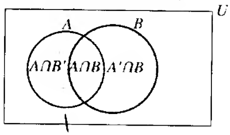


ভেনচিত্রে সার্বিক সেট U এর প্রতিটি উপসেট এর সদস্য সংখ্যা দেখানো হয়েছে। এখান থেকে আমরা পাই,

$n(A \cap B) + n(A' \cap B) + n(A \cap B') + n(A' \cap B') = n(U)$

সার্বিক সেট U এর যেকোনো দুইটি উপসেটের ক্ষেত্রে লেখা যায়

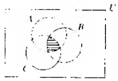
$$\boxed{n(A \cap B) + n(A' \cap B) + n(A \cap B') + n(A' \cap B') = n(U)}$$



উদাহরণ ৭। ভেনচিত্রে গাঢ় করে দেখাও

$(a)\ A \cap (B \cup C)$ $(b)\ A \cup (B \cap C)$

সমাধান :

(a) 

(b) 

উদাহরণ ৮। $U = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{x : x$ জোড়সংখ্যা$\}$

এবং $B = \{x : 7 < 3x < 25\}$

(a) $A, B, A \cap B, A \cup B$ এবং $A \cap B'$ এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ।

(b) x এর উপাদানগুলো বের কর যেন, $x \in A$ এবং $x \notin B$

(c) x এর উপাদানগুলো বের কর যেন $x \notin A$ এবং $x \notin B$

সমাধান : এখানে, $U = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(a) $A = \{2,4,6,8,10\}$

$B = \{3,4,5,6,7,8)$

$A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8,10\}$

$A \cap B = \{4,6,8\}$

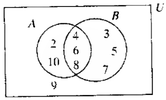
$A \cap B' = \{2,10\}$

(b) $x \in A$ এবং $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B'$

$\therefore\ x = 2, 10$



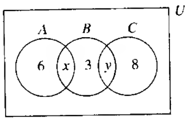
(c) $x \notin A$ এবং $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A' \cap B' = \{9\}$

$\therefore\ x = 9$

উদাহরণ ৯। ভেনচিত্রে সার্বিক সেট U এর প্রতিটি উপসেটের উপাদান সংখ্যা দেখানো হয়েছে। এখানে উল্লেখ্য যে, $U = A \cup B \cup C$.



(a) দেওয়া আছে $n(B) = n(C)$, x এর মান নির্ণয় কর।

(b) দেওয়া আছে $n(B \cap C) = n(A \cup B')$ এবং এখান থেকে y এর মান নির্ণয় কর

(a) $n(U)$ কত?

সমাধান : (a) $n(B) = n(C)$

$$x + 3 + y = y + 8$$

$$x = 5$$

(b) $n(B \cap C) = n(A \cup B')$

$$y = 6$$

(c) $n(U) = 6 + x + 3 + y + 8$

$$= 6 + 5 + 3 + 6 + 8$$

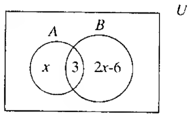
$$= 28$$

কাজ :

১। দেওয়া আছে, $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ এবং $A=\{x : x$, 3 এর গুণিতক$\}$. দেখাও যে,
(a) $A\cup A'=U$ (b) $A\cap A'=\Phi$

২। দেওয়া আছে $U=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ এবং $B=\{x : x$ জোড় সংখ্যা$\}$। ভেনচিত্রের সাহায্যে সেট A এবং $A\cap B$ এর উপাদানগুলোর তালিকা তৈরি কর।
দেখাও যে, (a) $A'\cap B'=\{9\}$ (b) $A\subseteq B'$ এবং $A\subseteq A'$.

৩। ভেনচিত্রে A ও B সেটের উপাদানগুলো দেখানো হলো।



দেওয়া আছে, $n(A)=n(A'\cap B)$; তাহলে
(a) x এর মান নির্ণয় কর।
(b) $n(A)$ ও $n(B)$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। $U=\{p,q,r,s,t,u,v,w\}$, $A=\{p,q,r,s\}$
$B=\{r,s,t\}$ এবং $C=\{s,t,u,v,w\}$
(a) $n(A\cup B)=$ কত?
(b) $(A\cup B)'$ এবং $A\cup B\cup C$ এর উপাদানগুলোর তালিকা তৈরি কর।

৫। ভেনচিত্রে গাঢ় $(Shade)$ করে দেখাও : (a) $(A\cap B)\cap C'$ (b) $(A\cap B')\cup C$

সেট প্রক্রিয়ার ধর্মাবলি

ইতোপূর্বে সেটের সংযোগ, ছেদ এবং নিশ্ছেদ সেট সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে এদের ধর্মাবলি সম্পর্কে আলোচনা করা হলো :

সংযোগ ও ছেদ সেটের ধর্মাবলী :

প্রতিজ্ঞা ১। বিনিময় নিয়ম ($(Commutative\ law)$)

মনে করি, $A=\{1,2,4\}$ এবং $B=\{2,3,5\}$ দুইটি সেট। তাহলে

$$A\cup B=\{1,2,4\}\cup\{2,3,5\}$$
$$=\{1,2,4,3,5\}$$
$$B\cup A=\{2,3,5\}\cup\{1,2,4\}$$
$$=\{2,3,5,1,4\}$$

যেহেতু,
$A\cup B=\{x : x\in A$ অথবা $x\in B\}$

যেহেতু $A\cup B$ এবং $B\cup A$ এ প্রকৃত পক্ষে একই উপাদানগুলো বিদ্যমান।

অতএব, $A\cup B=B\cup A$

একইভাবে আবার, $A=\{a,b,c\}$ এবং $B=\{b,c,a\}$ নিয়ে দেখানো যায় $A\cup B=B\cup A$

সাধারণত যেকোনো দুইটি সেট A এবং B এর ক্ষেত্রে দেখানো যায়

$$\boxed{A\cup B=B\cup A}$$

এটিই সংযোগ সেটের বিনিময় বিধি।

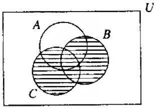
$\therefore$ সেটের সংযোগ সেটের বিনিময় বিধি মেনে চলে।

দ্রষ্টব্য : অনুরূপভাবে ছেদ প্রক্রিয়ায় বিনিময় বিধি

$$\boxed{A \cap B = B \cap A}$$

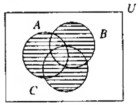
প্রতিজ্ঞা ২। সহযোজন নিয়ম (*Associative law*)

এ নিয়মটি বোঝার জন্য ভেনচিত্র ব্যবহার করা হলো। ধরি A, B ও C তিনটি সেট



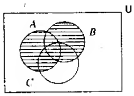
চিত্র-a (i)

$B \cup C$ হলো গাঢ় অংশটুকু



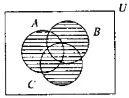
চিত্র-a (ii)

$A \cup (B \cup C)$ হলো গাঢ় অংশটুকু



চিত্র-b (i)

$A \cup B$ হলো গাঢ় অংশটুকু



চিত্র-b (ii)

$(A \cup B) \cup C$ হলো গাঢ় অংশটুকু

ভেনচিত্র $a(ii)$ এবং $b(ii)$ থেকে এটা পরিষ্কার যে, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

এ নিয়মটিই $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, f\}$ এবং $C = \{c, d, g\}$ তিনটি সেট নিয়ে বোঝার চেষ্টা করি

এখানে $B \cup C = \{b, c, f\} \cup \{c, d, g\}$

$$= \{b, c, d, f, g\}.$$

এবং $A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c, f, d, g\}$

$$= \{a, b, c, d, f, g\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

এখন, $A \cup B = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c, f\}$

$$= \{a, b, c, d, f\}$$

এবং $(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, f\} \cup \{c, d, g\}$

$$= \{a, b, c, d, f, g\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) ও (ii) হতে আমরা পাই, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

সাধারণত, যেকোনো তিনটি সেট A, B ও C এর জন্য

$$\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$$

$\therefore$ সেটের সংযোগ প্রক্রিয়া সহযোজন নিয়ম মেনে চলে।

অনুরূপভাবে ছেদ প্রক্রিয়া সহযোজন নিয়ম মেনে চলে

অর্থাৎ, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

প্রতিজ্ঞা ৩। $A \cup A = A$

$A \cup A$: এর জন্য ধরি $A = \{2,3,5\}$

$A \cup A = \{2,3,5\} \cup \{2,3,5\}$

$= \{2,3,5\}$

$= A$

একইভাবে $A = \{x, y, z\}$ নিয়ে দেখানো যায় যে, $A \cup A = A$

$\therefore$ সিদ্ধান্ত : যেকোনো সেট A এর জন্য

$\boxed{A \cup A = A}$

একইভাবে নিজে কর : $A \cap A = A$

প্রতিজ্ঞা ৪। যদি $A \subset B$ তখন $A \cup B = B$.

ধরি, $A = \{1,2,3\}$ এবং $B = (x|x \in N, 1 \le x \le 5\}$ দুইটি সেট।

$\therefore \quad A = \{1,2,3\}$ এবং $B = \{1,2,3,4,5\}$

$\therefore \quad A \subset B$.

এখন $A \cup B = \{1,2,3\} \cup \{1,2,3,4,5\}$

$= \{1,2,3,4,5\}$

$= B$.

এভাবে, যদি $A \subset B$ তখন $A \cup B = B$ এবং যদি $B \subset A$ তখন $A \cup B = A$.

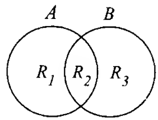
একইভাবে নিজে কর : $A \subset B$ তখন $A \cap B = A$ এবং যদি $B \subset A$ তখন $A \cap B = B$

প্রতিজ্ঞা ৫। $A \subset (A \cup B)$: মনে করি, A এবং B দুইটি সেট। পাশের চিত্র লক্ষ করি R_1 এবং R_2 এলাকা A সেটের অন্তর্ভুক্ত। আবার, R_2 এবং R_3 এলাকা B এর অন্তর্ভুক্ত।

সুতরাং, R_1, R_2 এবং R_3 এলাকা $A \cup B$ এর অন্তর্ভুক্ত।

কিন্তু R_1 এবং R_2 অঞ্চল R_1, R_2 এবং R_3 এলাকার অন্তর্গত

অর্থাৎ $A \subset (A \cup B)$.



সিদ্ধান্ত : যেকোনো সেট A ও B এর জন্য

$\boxed{A \subset (A \cup B)}$ এবং $\boxed{B \subset (A \cup B)}$

দ্রষ্টব্য : একইভাবে নিজে কর : যেকোনো সেট A এবং B এর জন্য $(A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$

প্রতিজ্ঞা ৬। $A \cup U = U$ এবং $A \cup \Phi = A$ আমরা জানি, $A \subset U$ এবং $\Phi \subset A$; (4) নং ধর্মানুযায়ী, $A \cup U = U$ এবং $A \cup \Phi = A$

কাজ :

১। $A \cup B$ নির্ণয় কর যখন

$A = \{x|x$ পূর্ণসংখ্যা, $-2 \le x < 1\}$ এবং $B = \{x|x$ মৌলিক সংখ্যা, $24 \le x \le 28\}$

২। $A \cup U$ নির্ণয় কর যেখানে $U = \{x | x$ পূর্ণসংখ্যা, $-2 < x < 3\}$ এবং
$A = \{x | x \in Z, -1 < x \leq 1\}$

৩। যদি $A = \{2,3,5\}, B = \{a,b,c\}, C = \{2,3,5,7\}$ এবং
$D = \{a,b,c,d\}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(A \cup B) \subset (C \cup D)$

৪। $A = \{a,b,c\}$ এবং $B = \{b,c,d\}$ এর জন্য যাচাই কর $A \cap B = B \cap A.$

৫। যদি $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,7,8\}$ এবং $C = \{7,8,9\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$(A \cap B) \cap C = (B \cap C) \cap A.$

প্রতিজ্ঞা ৭। বন্টন নিয়ম (*Distributive Law*)

A, B, C যেকোনো সেট হলে, দেখাও যে,

(ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রমাণ : মনে করি, $x \in A \cup (B \cap C)$

তাহলে $x \in A$ অথবা $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $(x \in B$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B)$ এবং $(x \in A$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .... (i)

আবার মনে করি, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

তাহলে, $x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B)$ এবং $(x \in A$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $(x \in B$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset (A \cup (B \cap C)$ .... (ii)

সুতরাং (i) ও (ii) হতে পাওয়া যায় $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(খ) একইভাবে নিজে কর।

কাজ :
(i) বন্টন বিধির সূত্রটি প্রমাণ কর। যেখানে –
$A = \{1,2,3,6\}, B = \{2,3,4,5\}$ এবং $C = \{3,5,6,7\}$
(ii) প্রমাণটি ভেনচিত্রের মাধ্যমে দেখাও

সিদ্ধান্ত : সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া দুইটির প্রত্যেকটি অপরটির প্রেক্ষিতে বণ্টন নিয়ম মেনে চলে।

প্রতিজ্ঞা ৮। দ্যা মরগ্যানের সূত্র ($De\ Morgan's\ laws$) :

সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য (ক) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(খ) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

প্রমাণ (ক) : মনে করি, $x\in(A\cup B)'$

তাহলে, $x\notin A\cup B$

$\Rightarrow x\notin A$ এবং $x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'$ এবং $x\in B'$ ..

$\Rightarrow x\in A'\cap B'$

$\therefore\ (A\cup B)'\subset A'\cap B'$

আবার মনে করি, $x\in A'\cap B'$

তাহলে, $x\in A'$ অথবা $x\in B'$

$\Rightarrow x\notin A$ অথবা $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)'$

$\therefore A'\cap B'\subset(A\cup B)'$

সুতরাং $(A\cup B)'=A'\cap B'$ প্রমাণিত।

(খ) অনুরূপভাবে নিজে কর :

প্রতিজ্ঞা ৯। সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য $A\setminus B=A\cap B'$

প্রমাণ : মনে করি, $x\in A\setminus B$

তাহলে $x\in A$ এবং $x\notin B$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $x\in B'$

$\therefore x\in A\cap B'$

$\therefore A\setminus B\subset A\cap B'$

আবার মনে করি, $x\in A\cap B'$

তাহলে, $x\in A$ এবং $x\in B'$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $x\notin B$

$\therefore\ x\in A\setminus B$

$\therefore A\cap B'\subset A\setminus B$

সুতরাং, $A\setminus B=A\cap B'$

প্রতিজ্ঞা ১০। যেকোনো সেট A,B,C এর জন্য

(ক) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(খ) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

প্রমাণ : (ক) সংজ্ঞানুসারে

$A\times(B\cap C)$

$=\{(x,y):x\in A,y\in B\cap C\}$

$= \{(x,y) : x \in A, y \in B$ এবং $y \in C\}$

$= \{(x,y) : (x,y) \in A \times B$ এবং $(x,y) \in A \times C\} = \{(x,y) : (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

আবার $(A \times B) \cap (A \times C)$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$

$= \{x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x \in A, y \in C\}$

$= \{(x, y) : x \in A, y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B \cap C\}$

$\therefore \quad (A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$

অর্থাৎ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(খ) অনুরূপভাবে নিজে কর।

১১। সেট প্রক্রিয়া সংক্রান্ত আরও কতিপয় প্রতিজ্ঞা :

(ক) A যেকোনো সেট হলে $A \subset A$

(খ) ফাঁকা সেট Φ যেকোনো সেট A এর উপসেট

(গ) A ও B যেকোনো সেট হলে $A = B$ হবে যদি ও কেবল যদি $A \subset B$ এবং $B \subset A$ হয়।

(ঘ) যদি $A \subset \Phi$ হয়, তবে $A = \Phi$

(ঙ) যদি $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হয়, তবে $A \subset C$

(চ) A ও B যেকোনো সেট হলে, $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$

(ছ) A ও B যেকোনো সেট হলে $A \subset A \cup B$ এবং $B \subset A \cup B$

প্রমাণ : (খ) : মনে করি $\Phi \not\subset A$, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে এমন x আছে যেন $x \in \Phi$। কিন্তু $\Phi \not\subset A$ যেহেতু শূন্য সেটে আদৌ কোনো উপাদান নেই।

$\therefore \ \Phi \not\subset A$ সত্য নয়

$\therefore \ \Phi \in A$

(ঘ) দেওয়া আছে, $A \subset \Phi$ আবার আমরা জানি, $\Phi \subset A$ সুতরাং $A = \Phi$ [প্রতিজ্ঞা গ থেকে]

(ছ) সেটের সংযোগের সংজ্ঞানুযায়ী A সেটের সকল উপাদান $A \cup B$ সেটে থাকে। সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুযায়ী $A \subset A \cup B$। একই যুক্তিতে $B \subset A \cup B$

দ্রষ্টব্য : ক, গ, ঙ ও চ প্রতিজ্ঞাগুলো নিজে কর।

কাজ : [এখানে সকল সেট সার্বিক সেট U এর উপসেট বিবেচনা করতে হবে]

১। দেখাও যে : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

২। দেখাও যে, $A \subset B$ হবে যদি এবং কেবল যদি নিম্নোক্ত যেকোনো একটি শর্ত খাটে :

(ক) $A \cap B = A$

(খ) $A \cup B = B$

(গ) $B' \subset A$

(ঘ) $A \cap B' = \Phi$

(ঙ) $B \cup A' = U$

৩। দেখাও যে,
(ক) $A\backslash B \subset A \cup B$
(খ) $A' \backslash B' = B\backslash A$
(গ) $A\backslash B \subset A$
(ঘ) $A \subset B$ হলে . $A \cup (B\backslash A) = B$
(ঙ) $A \cap B = \Phi$ হলে, $A \subset B'$; $A \cap B' = A$ এবং $A \cup B' = B'$
৪। দেখাও যে,
(ক) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
(খ) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$
(গ) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

সমতুল ও অসীম সেট

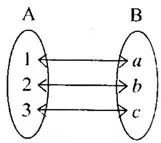
এক-এক মিল (*One One Correspondence*)

মনে করি, $A = \{a, b, c\}$ তিনজন লোকের সেট এবং $B = \{30, 40, 50\}$ ঐ তিনজন লোকের বয়সের সেট। অধিকন্তু মনে করি, a এর বয়স 30, b এর বয়স 40 এবং C এর বয়স 50।
সুতরাং বলা যায় যে, A সেটের সাথে B সেটের এক-এক মিল আছে।

সংজ্ঞা : যদি A সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদান এবং B সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে A সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানের মিল স্থাপন করা হয়, তবে A ও B এর মধ্যে এক-এক মিল বলা হয়। A ও B এর মধ্যে এক-এক মিলকে সাধারণত $A \leftrightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং A সেটের কোনো সদস্য x এর সঙ্গে B সেটের যে সদস্য y এর মিল করা হয়েছে তা $x \leftrightarrow y$ লিখে বর্ণনা করা হয়।

সমতুল সেট (*Equivalent sets*)

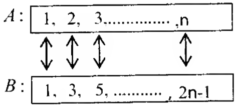
ধরি, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ দুইটি সেট। নিচের চিত্রে A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপন করে দেখানো হলো :



সংজ্ঞা : যেকোনো সেট A ও B এর মধ্যে যদি একটি এক-এক মিল $A \leftrightarrow B$ বর্ণনা করা যায়, তবে A ও B কে সমতুল সেট বলা হয়। A ও B কে সমতুল বোঝাতে $A \sim B$ প্রতীক লেখা হয়। $A \sim B$ প্রতীক হলে, এদের যেকোনো একটিকে অপরটির সাথে সমতুল বলা হয়।

উদাহরণ ১০। দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \ldots\ldots n\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, \ldots\ldots 2n-1\}$ সেটদ্বয় সমতুল, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

সমাধান : A ও B সেট দুইটির মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো :

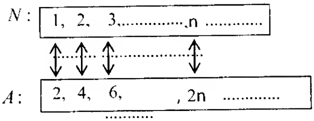


সুতরাং A ও B সেট দুইটি সমতুল।

মন্তব্য : উপরের চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $A \leftrightarrow B : K \leftrightarrow 2k-1$, $k \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

উদাহরণ ১১। দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং জোড় সংখ্যার সেট $A = \{2, 4, 6, \ldots\ldots 2n \ldots\ldots\}$ সমতুল।

সমাধান : এখানে, $N = \{1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots; n \ldots\ldots\}$ N এবং A এর মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো



সুতরাং N ও A সমতুল সেট।

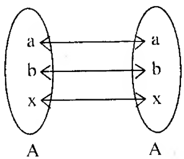
মন্তব্য : উপরে চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $N \leftrightarrow A : n \leftrightarrow 2n, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

দ্রষ্টব্য : ফাঁকা সেট Φ এর নিজের সমতুল ধরা হয়। অর্থাৎ, $\Phi \sim \Phi$

প্রতিজ্ঞা ১। প্রত্যেক সেট A এর নিজের সমতুল।

প্রমাণ : $A \sim \Phi$ হলে, $A \sim A$ ধরা হয়।

মনে করি, $A \neq \Phi$

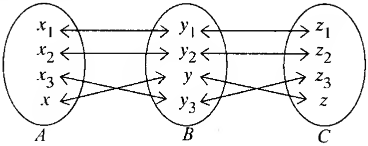


A সেটের প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে এর নিজেকে মিল করা হলে এক-এক মিল $A \leftrightarrow A : x \leftrightarrow x, x \in A$ স্থাপিত হয়।

সুতরাং $A \sim A$.

প্রতিজ্ঞা ২ : যদি A ও B সমতুল সেট হয় এবং B ও C সমতুল সেট হয়, তবে A ও C সমতুল সেট হবে।

প্রমাণ : যেহেতু $A \sim B$, সুতরাং A এর প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে B এর একটি অনন্য সদস্য y এর মিল করা যায়। আবার যেহেতু $B \sim C$, সুতরাং B এর এই সদস্য y এর সঙ্গে C এর একটি অনন্য সদস্য z এর মিল করা যায়। এখন A এর সদস্য x এর সঙ্গে C এর এ সদস্য z এর মিল করা হলে, A ও C সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয়। অর্থাৎ, $A \sim C$ হয়।



সান্ত ও অনন্ত সেট (*Finite and Infinite sets)*

$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$ সেটটির সদস্যগুলো গণনা করে দেখা যায় যে, A সেটের সদস্য সংখ্যা 8। এই গণনা কাজ A সেটের সঙ্গে $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ সেটের একটি এক-এক মিল স্থাপন করে সম্পন্ন করা হয়। যেমন,

$$\begin{array}{lcccccccc} A = & \{15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8\} \end{array}$$

এরূপ গণনা করে যে সকল সেটের সদস্য সংখ্যা নির্ধারণ করা যায়, এদেরকে সান্ত সেট বলা হয়। ফাঁকা সেটকেও সান্ত সেট ধরা হয়।

সংজ্ঞা : (ক) ফাঁকা সেট Φ সান্ত সেট এর সদস্য সংখ্যা 0.

(খ) যদি কোনো সেট A এবং $J_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ সমতুল হয়, যেখানে $m \in N$, তবে A একটি সান্ত সেট এবং A এর সদস্য সংখ্যা m।

(গ) A কোনো সান্ত সেট হলে, A এর সদস্য সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(ঘ) কোনো সেট A সান্ত সেট না হলে, একে অনন্ত সেট বলা হয়।

দ্রষ্টব্য ১। $J_1 = \{1\}, J_2 = \{1, 2\}, J_3 = \{1, 2, 3\}$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই N এর সান্ত উপসেট এবং $n(J_1) = 1$, $n(J_2) = 2$, $n(J_3) = 3$ ইত্যাদি।

বাস্তবিক পক্ষে, $J_m \sim J_m$ (এই অনুচ্ছেদের প্রতিজ্ঞা ১ দ্রষ্টব্য) এবং $n(J_m) = m$।

দ্রষ্টব্য ২। শুধুমাত্র সান্ত সেটেরই সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। সুতরাং $n(A)$ লিখলে বুঝতে হবে A সান্ত সেট।

দ্রষ্টব্য ৩। A ও B সমতুল সেট এবং এদের মধ্যে একটি সেট সান্ত হলে অপর সেটটিও সান্ত হবে এবং $n(A) = n(B)$ হবে।

প্রতিজ্ঞা ৩। যদি A সান্ত সেট হয় এবং B, A এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে B সান্ত সেট এবং $n(B) < n(A)$ হবে।

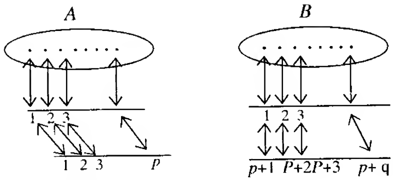
প্রতিজ্ঞা ৪। A অনন্ত সেট হবে যদি ও কেবল যদি A এবং A এর একটি প্রকৃত উপসেট সমতুল হয়।

দ্রষ্টব্য ৫। N একটি অনন্ত সেট (উদাহরণ ১১ দ্রষ্টব্য)।

সান্ত সেটের উপাদান সংখ্যা

সান্ত সেট A এর উপাদান সংখ্যা $n(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়েছে এবং $n(A)$ নির্ধারণের পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

মনে করি, $n(A) = P > 0, n(B) = q > 0,$ যেখানে $A \cap B = \Phi$



উপরের চিত্রে বর্ণিত এক-এক মিল থেকে দেখা যায় যে, $A \cup B \sim J_{p+q}$

অর্থাৎ, $n(A \cup B) = p + q = n(A) + n(B)$ এ থেকে বলা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা ১। যদি A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সেট হয়, তবে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

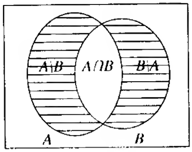
এই প্রতিজ্ঞাকে সম্প্রসারণ করে বলা যায় যে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$ ইত্যাদি,

যেখানে A, B, C, D সেটগুলো পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট।

প্রতিজ্ঞা ২। যেকোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

প্রমাণ : এখানে, $A \setminus B, A \cap B$ এবং $B \setminus A$ সেট তিনটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য] এবং



$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$\therefore n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) .....(i)$

$n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B) ....(ii)$

$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) ......(iii)$

সুতরাং, (i) নং থেকে পাই, $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

(ii) নং থেকে পাই, $n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B)$

এখন, $n(A \setminus B)$ এবং $n(B \setminus A)$ (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B)$$

$$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

কাজ :

১। নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে A ও B এর মধ্যে সম্ভাব্য সকল এক-এক মিল বর্ণনা কর :
(ক) $A = \{a, b\}$ $B = \{1, 2\}$.
(খ) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, b, c\}$

২। উপরের প্রশ্নে বর্ণিত প্রত্যেক এক-এক মিলকরণের জন্য $F = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ এবং $x \leftrightarrow y$ সেটটি তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর।

৩। মনে করি $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$ । $A \times B$ এর একটি উপসেট F বর্ণনা কর। যার অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদের সঙ্গে দ্বিতীয় পদের মিল করা হলে, A ও B এর একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয়, যেখানে $a \leftrightarrow 3$ ।

৪। দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, \ldots\ldots\ldots\ldots 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

৫। দেখাও যে, $S = \{3^n : n = 0$ অথবা $n \in N\}$ সেটটি N এর সমতুল।

৬। উপরের প্রশ্নে বর্ণিত S সেটের একটি প্রকৃত উপসেট বর্ণনা কর যা S এর সমতুল।

৭। দেখাও যে, সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\}$ ইত্যাদি অনন্ত সেট।

শক্তি সেট

মাধ্যমিক বীজগণিতে এ সংক্রান্ত বিস্তারিত অলোচনা করা হয়েছে। এখানে শুধু শক্তি সেটের উদাহরণ দেওয়া হলো :

উদাহরণ ১২। যদি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{2, 3, 4\}$ হয়, তবে দেখাও যে, $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

সমাধান : এখানে, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{2, 3, 4\}$

সুতরাং, $P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

এবং $P(B) = \{\Phi, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$

$\therefore\ P(A) \cap P(B) = \{\Phi, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

এখন, $A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{2, 3,4\}$

$= \{2, 3\}$

$\therefore\ P(A \cap B) = \{\Phi, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

সুতরাং $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.

উদাহরণ ১৩। যদি $A=\{a,b\}$ এবং $B=\{b,c\}$ হয়, তবে দেখাও যে, $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$

সমাধান : এখানে, $P(A)=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$P(B)=\{\Phi, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

$\therefore P(A)\cup P(B)=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

আবার, $A\cup B=\{a,b,c\}$

$\therefore P(A\cup B)=\{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\ \{a, b, c\}\}$

সুতরাং, $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$.

কাজ :

১। যদি $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2\}, C=\{2,3\}$ এবং $D=\{1,3\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$P(A)=\{A, B, C, D, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Phi\}$

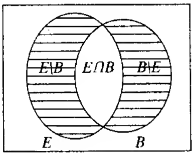
২। যদি $A=\{1,2\}$ এবং $B=\{2,5\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$P(A)=\{A, B, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Phi\}$.
$(i)\ P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$
$(ii)\ P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$.

বাস্তব সমস্যা সমাধানে সেট :

বাস্তব সমস্যা সমাধানে ভেনচিত্র ব্যবহার করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, প্রতিসেটের উপাদান সংখ্যা ভেনচিত্রে লেখা হবে, তা কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হলো।

উদাহরণ ১৪। 50 জন লোকের মধ্যে 35 জন ইংরেজি 25 জন ইংরেজি ও বাংলা বলতে পারে এবং প্রত্যেকেই দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে। বাংলা বলতে পারে কত জন ? কেবল মাত্র বাংলা বলতে পারে কত জন ?

সমাধান : মনে করি, সকল লোকের সেট S এবং তাদের মধ্যে যারা ইংরেজি বলতে পারে তাদের সেট E, যারা বাংলা বলতে পারে তাদের সেট B।



তাহলে প্রশ্নানুসারে, $n(S)=50$, $n(E)=35$, $n(E\cap B)=25$ এবং

$S=E\cup B$

মনে করি, $n(B)=x$

তাহলে, $n(S)=n(E\cup B)=n(E)+n(B)-n(E\cap B)$ থেকে পাই,

$50=35+x-25$

বা, $x=50-35+25=40$

অর্থাৎ, $n(B)=40$

$\therefore$ বাংলা বলতে পারে 40 জন।

এখন, যারা কেবল বাংলা বলতে পারে, তাদের সেট হচ্ছে $(B\setminus E)$।

মনে করি, $n(B \setminus E) = y$; যেহেতু $E \cap B$ এবং $B \setminus E$ নিশ্ছেদ এবং $B = (E \cap B) \cup (B \setminus E)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]

সুতরাং $n(B) = n(E \cap B) + n(B \setminus E)$

$\therefore\ 40 = 25 + y$

বা, $y = 40 - 25 = 15$

অর্থাৎ, $n(B \setminus E) = 15$

$\therefore$ কেবল বাংলা বলতে পারে 15 জন। অতএব, বাংলা বলতে পারে 40 জন এবং কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে 15 জন।

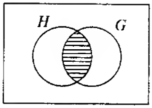
উদাহরণ ১৫। ভূগোল ও ইতিহাস বিষয়ে পড়াশোনা করছে এমন ছাত্রদের সেট যথাক্রমে G ও H হলে নিম্নের প্রশ্নের উত্তর দাও (উল্লেখ্য, সেটের সদস্য নির্দেশ করতে x ব্যবহার করা হয়েছে।)

(a) (*i*) ভূগোল ও ইতিহাস উভয় বিষয়ে পড়াশোনা করছে এমন ছাত্রদের সংখ্যা।

(*ii*) শুধুমাত্র ইতিহাসে পড়াশোনা করছে এমন ছাত্রদের সংখ্যা

ভেনচিত্রে গাঢ় করে দেখাও।

(*b*) কোনো ক্লাসের 32 জন ছাত্রের মধ্যে প্রত্যেক ছাত্র অন্তত ভূগোল বা ইতিহাস বিষয়ে পড়াশোনা করছে। তাদের মধ্যে 22 জন ভূগোল এবং 15 জন ইতিহাসে। কতজন ছাত্র ইতিহাস ও ভূগোল উভয় বিষয়ে পড়েছে তা ভেনচিত্রে দেখাও।

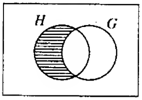


সমাধান : $(a)\,(i)$ $x \in H$ এবং $x \in G$

$i.e.\ x \in H \cap G$

(ii) $x \in H$ এবং $x \notin G$

$\text{i.e.} x \in H \setminus G$

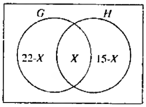


(b) ধরি, ইতিহাস বিষয়ে পড়েছে এমন ছাত্রদের সেট H

ভূগোল বিষয়ে পড়েছে এমন ছাত্রদের সেট G

তাহলে $H \cap G$ ভূগোল ও ইতিহাস বিষয় পড়েছে এমন ছাত্রদের সেট

ধরি, $n(H \cap G) = x$



যেহেতু এক বিষয়ে অন্তত প্রত্যেকে পড়ছে, $H \cup G = \cup$

$\text{n}(H \cup G) = \text{n}(U)$

i.e. $(22 - x) + x + (15 - x) = 32$

$\Rightarrow 37 - x = 32$

$\therefore\ x = 5$

সুতরাং 5 জন ছাত্র ইতিহাস ও ভূগোল উভয় বিষয়ে পড়ছে।

উদাহরণ ১৬। একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের যেকোনো একটিতে অংশগ্রহণ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার ও নাচ, 7 জন সাঁতারে অংশগ্রহণ করে কিন্তু নাচে নয়।

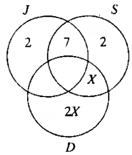
তাদের মধ্যে 20 জন দৌড় পছন্দ করে না, x জনের সাঁতার ও নাচ পছন্দ, $2x$ জন শুধু নাচ পছন্দ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(a) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও

(b) x নির্ণয় কর

(c) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর {যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়}

(d) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না।

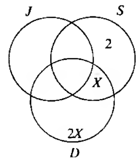


সমাধান : (a)

ধরি, সেট $J =$ যারা দৌড় পছন্দ করে

$S =$ যারা সাঁতার পছন্দ করে

$D =$ যারা নাচ পছন্দ করে



(b) $J' =$ {যেসব বালিকা দৌড় পছন্দ করে না}

$n(J') = 20$

বা, $2x + x + 2 = 20$

বা, $3x = 18$

$x = 6$

(c) {যে সব বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না}

$J \cap D \cap S'$

(d) ধরি, $n(J \cap D \cap S') = y$

দেওয়া আছে $n(J) = 15$

$y + 4 + 7 + 2 = 15$

$y = 2$

শুধু 2 জন বালিকা দৌড় এবং নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না।

উদাহরণ ১৭। কোনো শ্রেণির 24 জন ছাত্রের 18 জন বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে, 12 জন ভলিবল খেলা পছন্দ করে। দেওয়া আছে, $U =$ {শ্রেণির ছাত্রদের সেট}, $B =$ {বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট} $V =$ {ভলিবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রদের সেট}

মনে করি, $n(B \cap V) = x$ এবং ভেনচিত্রে নিচের তথ্যগুলো ব্যাখ্যা কর :

(a) $B \cup V$ সেটের বর্ণনা দাও এবং $n(B \cup V)$ কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(b) x এর সম্ভাব্য ন্যূনতম মান নির্ণয় কর।

(c) x এর সম্ভাব্য বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

(a) $B \cup V$ হলো এমন সব ছাত্রের সেট যারা বাস্কেটবল বা ভলিবল খেলা পছন্দ করে।

$\therefore\ n(B \cup V) = (18-x) + x + (12-x) = 30 - x$

(b) $n(B \cap V)$ ক্ষুদ্রতম যখন $B \cup V = U$ তখন, $n(B \cup V) = n(U) = 30 - x = 24$ বা $x = 6$

$\therefore$ সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম মান $x = 6$

(c) $n(B \cap V)$ বৃহত্তম যখন $V \subseteq B = U$ তখন , $n(B \cap V) = n(V) = x = 12$

$\therefore$ সম্ভাব্য বৃহত্তম মান $x = 12$

কাজ :

১। কোনো শ্রেণির 30জন ছাত্রের 20জন ফুটবল এবং 15জন ক্রিকেট পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার যেকোনো একটি খেলা পছন্দ করে। কতজন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে ?

২। কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 50জন বাংলা, 20জন ইংরেজি এবং 10জন বাংলা ও ইংরেজি বলত পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষা কতজন বলতে পারে ?

৩। ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42জন ফ্রেঞ্চ, 30জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10জন নিয়েছে ফেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফেঞ্চ, 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

(i) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি ?

(ii) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে ?

(iii) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে।

৪। কোনো স্কুলের নবম শ্রেণির মানবিক শাখার 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29জন পৌরনীতি, 24জন ভূগোল এবং 11জন পৌরনীতি ও ভূগোল উভয় বিষয় নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী পৌরনীতি বা ভূগোল বিষয় দুইটির কোনটিই নেয়নি ?

অনুশীলনী ১.১

১। *i.* কোনো সেটের সদস্য সংখ্যা $2n$ হলে, এর উপসেটের সংখ্যা হবে 4^n

ii. সকল মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0\right\}$

iii. $a, b \in R ;]a, b[= \{x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (২-৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য $A_n = \{n, 2n, 3n, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

২। $A_1 \cap A_2$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. A_1 খ. A_2 গ. A_3 ঘ. A_4

৩। নিচের কোনটি $A_3 \cap A_6$ এর মান নির্দেশ করে ?

ক. A_2 খ. A_3 গ. A_2 ঘ. A_6

৪। $A_2 \cap A_3$ এর পরিবর্তে নিচের কোনটি লেখা যায় ?

ক. A_3 খ. A_4 গ. A_2 ঘ. A_6

৫। দেওয়া আছে $U = \{x : 3 \le x \le 20, x \in Z\}$, $A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ নিম্নের সেটের উপাদানগুলোর তালিকা লিপিবদ্ধ কর :

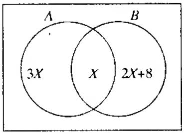
(a) A এবং B

(b) $C = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ এবং

$D = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

সেট C এবং D এর বর্ণনা দাও।

৬। ভেনচিত্রে A এবং B সেটের উপাদানগুলো দেখানো হয়েছে। যদি $n(A) = n(B)$ হয়, তবে নির্ণয় কর (a) x এর মান (b) $n(A \cup B)$ এবং $n(A \cap B')$.



৭। ভেনচিত্রে A এবং B সেটদ্বয়ের প্রত্যেকের উপাদানগুলো দেখানো হয়েছে। $n(A' \cap B')$ নির্ণয় কর।

(a) x এর মান (b) $n(A)$ এবং $n(B)$

৮। যদি $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : x \ge 5\}$ এবং $B = \{x : x < 12\}$

তবে $n(A \cap B)$ এবং $n(A')$ এর মান নির্ণয় কর।

৯। যদি $U = \{x : x$ জোড় পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : 3x \ge 25\}$ এবং $B = \{x : 5x < 12\}$ হয়, তাহলে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cap B')$ এর মান নির্ণয় কর।

১০। দেখাও যে, (ক) $A \setminus A = \Phi$ (খ) $A \setminus (A \setminus A) = A$

১১। দেখাও যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

১২। যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$

১৩। দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, \ldots\ldots\ldots, 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

১৪। দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট $S = \{1,4,9,25,36,............\}$ একটি অনন্ত সেট।

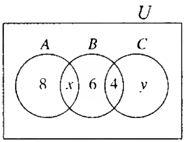
১৫। প্রমাণ কর যে, $n(A) = p, n(B) = q$ এবং $A \cap B = \Phi$ হলে, $n(A \cup B) = p + q$ ।

১৬। প্রমাণ কর যে, A, B, C সান্ত সেট হলে,
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ ।

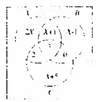
১৭। যদি $A = \{a, b, x\}$ এবং $B = \{c, y\}$ সার্বিক সেট $U = \{a, b, c, x, y, z\}$ এর উপসেট হলে, যাচাই কর যে, $(a)(i) A \subset B'$, $(ii)\ A \cup B' = B'$, $(iii)\ A' \cap B = B$
(b) নির্ণয় কর : $(A \cap B) \cup (A \cap B')$

১৮। কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 5 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনোটিই নেয়নি ?

১৯। ভেনচিত্রে সার্বিক সেট U এবং উপসেট A, B, C এর সদস্য সংখ্যা উপস্থাপন করা হয়েছে।
(a) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।
(b) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর।
(c) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।



২০। ভেনচিত্রে A, B, C সেটের উপাদানগুলো এমনভাবে দেওয়া আছে যেন, $U = A \cup B \cup C$



(a) যদি $n(U) = 50$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।
(b) $n(B \cap C')$ এবং $n(A' \cap B)$ এর মান নির্ণয় কর।
(c) $n(A \cap B \cap C')$ এর মান নির্ণয় কর।

২১। তিনটি সেট A, B এবং C এমনভাবে দেওয়া আছে যেন, $A \cap B = \Phi, A \cap C = \Phi$ এবং $C \subset B$; ভেনচিত্র অংকন করে সেটগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

২২। দেওয়া আছে $A = \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\}$ এবং $B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$
এবং $C = \{2,4,5\}$ নিম্নের সেটগুলো অনুরূপ *set notation* এ প্রকাশ কর :
(a) $A \cap B$ (b) $A' \cap B'$ এবং (c) $A' \cup B$

২৩। দেওয়া আছে $U = \{x : x < 10, x \in R\}$, $A = \{x : 1 < x \leq 4\}$ এবং $B = \{x : 3 \leq x < 6\}$. নিচের সেটগুলো অনুরূপ সেট চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ কর :
(a) $A \cap B$ (b) $A' \cap B$ (c) $A \cap B'$ এবং (d) $A' \cap B'$

২৪। নিম্নে A ও B সেট দেওয়া আছে। প্রতিক্ষেত্রে $A \cup B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$
i. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-3, 0, 3\}$

ii. $A = \{x : x \in N,\ x < 10$ এবং $x, 2$ এর গুণিতক$\}$

এবং $B = \{x : x \in N,\ x < 10$ এবং $x, 3$ এর গুণিতক$\}$

২৫। নিম্নের সেটগুলো ব্যবহার করে $A \cap B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে,

$(A \cap B \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$

(i) $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}, B = \{-1, 0, 2\}$

(ii) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, x, c, y\}$

২৬। আনোয়ারা মহাবিদ্যালয়ের ছাত্রীদের মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকার পাঠ্যাভাস সম্পর্কে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল 60% ছাত্রী বিচিত্রা, 50% ছাত্রী সন্ধানী, 50% ছাত্রী পূর্বাণী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও সন্ধানী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও পূর্বাণী, 20% ছাত্রী সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

(i) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকা তিনটির কোনটিই পড়ে না ?

(ii) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুইটি পড়ে ?

২৭। $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0\}$

$B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

ক. A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$

গ. প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

২৮। একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন হকি খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও হকি এবং 12 জন ফুটবল ও হকি খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়-

ক. উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী এমন ছাত্রদের সেট এবং কোনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট ভেনচিত্রে দেখাও-

খ. কতজন ছাত্র উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী তা নির্ণয় কর।

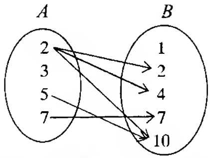
গ. কতজন ছাত্র কেবলমাত্র একটি খেলায় পারদর্শী এবং কতজন অন্তত দুইটি খেলায় পারদর্শী ?

অন্বয় (Relation) এবং ফাংশন (Function)

$3, 2$ এর চেয়ে বড়, 3 এর বর্গ 9। এগুলো অন্বয়ের উদাহরণ। প্রথম উদাহরণে লক্ষ করি, 'এর চেয়ে বড়' কথাটি সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে যা সকল বাস্তব সংখ্যার সেট R এর অন্তর্গত। আবার ২য় উদাহরণে সম্পর্কটি 'এর বর্গ' ও বাস্তব সংখ্যার সেট R এর অন্তর্গত।

উল্লেখ্য যে সকল বাস্তব সংখ্যা R সেটে অন্তর্গত কিন্তু অন্বয় নয়। যেমন 3 মৌলিক সংখ্যা অন্বয় নয় কারণ 3 অন্যকোনো সংখ্যার সঙ্গে সম্পর্কিত নয়। যা ভেনচিত্রের মাধ্যমে উদাহরণ ১-এ দেখানো হলো।

উদাহরণ ১। মনে করি $A=\{2,3,5,7\}$ এবং $B=\{1,2,4,7,10\}$ । A এর যে যে সদস্য দ্বারা B এর যে যে সদস্য বিভাজ্য হয় এদের অঙ্কিত করে নিচে চিত্রে দেখানো হলো :



এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট $D=\{(2,2)(2,4)(2,10)(5,10)(7,7)\}$ দ্বারা এই বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়। D সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদ A এর সদস্য ও দ্বিতীয় পদ B এর সদস্য যেখানে প্রথম পদ দ্বারা দ্বিতীয় পদ বিভাজ্য।

অর্থাৎ, $D\subset A\times B$ এবং $D=\{(x,y): x\in A, y\in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$, এখানে D সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

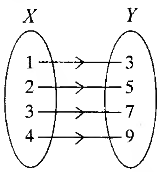
উদাহরণ ২। বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড়ের সেট $L=\{(x,y): x\in R, y\in R$ এবং $x<y\}$ বিবেচনা করি যে, দুইটি বাস্তব সংখ্যা a,b এর জন্য $a<b$ যদি ও কেবল যদি $(a,b)\in L$ হয়। সুতরাং L সেট দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ছোট-বড় সম্পর্ক বর্ণিত হয়।

সংজ্ঞা : A ও B সেট হলে $A\times B$ এর কোনো অশূন্য উপসেটকে A থেকে B এ একটি অন্বয় $(relation)$ বলা হয়।

সংজ্ঞা : A একটি সেট হলে $A\times A$ এর কোনো অশূন্য উপসেটকে A থেকে A এ একটি অন্বয় বলা হয়।

মন্তব্য : প্রত্যেক অন্বয় এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের একটি সেট।

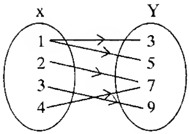
ভেনচিত্রে সেট $X=\{1,2,3,4\}$ এর উপাদানগুলো সেট $Y=\{3,5,7,9\}$ এর উপাদনগুলোর সঙ্গে অ্যারো $(arrow)$ চিহ্ন দ্বারা সংযোগ স্থাপন দেখানো হয়েছে। সেট X ও Y এর মাঝে এরূপ সংযোগ স্থাপনকে X হতে Y এ অন্বয় $(relation)$ বলা হয়।



ভেনচিত্রে X সেটের সদস্য 1 এর সাথে Y সেটের সদস্য 3 এর সম্পর্ককে $1\rightarrow 3$ দ্বারা প্রকাশ করে আমরা বলি প্রারম্ভিক সদস্য 1 এবং শেষ সদস্য 3 অথবা 1 ম্যাপিং 3 । তদ্রূপ $2\rightarrow 5$, $3\rightarrow 7$ এবং $4\rightarrow 9$.

সুতরাং X সেটের প্রতিটি সদস্য x, Y সেটের একটি মাত্র সদস্য y এর সাথে সম্পর্কিত। এ সম্পর্ককে ফাংশন বা ম্যাপিং বলে।

ভেনচিত্রে আরেকটি সম্পর্ক বিবেচনা করি:

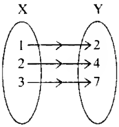


চিত্র থেকে দেখা যায়, $1 \to 3, 1 \to 5, 2 \to 7, 3 \to 9$ এবং $4 \to 7$.

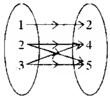
X সেটের সদস্য 1, Y সেটের দুইটি সদস্য 3 এবং 5 এর সাথে ম্যাপিং। এ সম্পর্ক কি ফাংশন ?

উদাহরণ ৩। নিচের কোন অন্বয়টি ($relation$) ফাংশন নয় ? যুক্তি দাও।

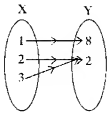
(a)



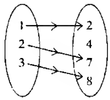
(b)



(c)



(d)



সমাধান: (a) এবং (d) সম্পর্ক দুইটি ফাংশন, কিন্তু (b) সম্পর্কটি ফাংশন নয় কারণ $3 \to 4$ এবং $3 \to 5$।
ফাংশনকে সাধারণত ইংরেজি ছোট হাতের অক্ষর f, g, h ইত্যাদি দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সেট $X = \{1, 2, 3, 4\}$ হতে সেট $Y = \{3, 5, 7, 9\}$ ফাংশন নির্দেশ করতে আমরা লিখি

$$f: 1 \to 3, f: 2 \to 5, f: 3 \to 7 \text{ এবং } f: 4 \to 9$$

এখানে 3 কে বলা হয় 1 এর ইমেজ। তদ্রূপ 5, 7 ও 9 যথাক্রমে 2, 3 ও 4 এর ইমেজ।

অধিকন্তু X সেটের যেকোনো সদস্য x এবং Y সেটের যেকোনো সদস্য y এর সম্পর্কটিকে আমরা $y = 2x + 1$ আকারে প্রকাশ করতে পারি।

অতএব, ফাংশনকে আমরা নিম্নের নিয়ম অনুসরণ করে প্রকাশ করতে পারি-

$f: x \to y,$ যেখানে $y = 2x + 1$

অথবা $f: x \to 2x + 1$

যেখানে আমরা লিখতে পারি $f(x) = 2x + 1$

তাহলে $f(1) = 3$ হলো 1 এর ইমেজ এবং $f(x)$ হলো x এর ইমেজ।

আলোচিত ফাংশনের মধ্যে প্রথম সেট $X = \{1, 2, 3, 4\}$ কে ফাংশনটির আধার বা ডোমেন $(Domain)$ এবং প্রথমোক্ত সেট হতে প্রদত্ত নিয়মে প্রাপ্ত দ্বিতীয় সেটের সংখ্যাগুলোর সেটকে ফাংশনটির বিস্তার বা রেঞ্জ $(Range)$ বলা হয়।

অন্যভাবে বলা যায়, $y = f(x)$ ফাংশনের আধার হলো x এর এমন একটি সেট যেখানে সমস্ত x এর জন্য $f(x)$ ফাংশনের মান নির্ণয় করা সম্ভব। আর ফাংশনটির আধার বা ডোমেন x এর জন্য $f(x)$ এর যে সমস্ত মান পাওয়া যায়, এদের সংগ্রহকে এর বিস্তার বা রেঞ্জ বলে।

উদাহরণ ৪। $f : x \to 2x^2 + 1$ এর ইমেজ নির্ণয় কর : যেখানে ডোমেন $X = \{1, 2, 3\}$

সমাধান : $f(x) = 2x^2 + 1$

1,2,3 এর ইমেজ হলো : $f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3, f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9$

এবং $f(3) = 2(3)^2 + 1 = 19$

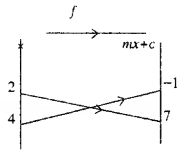
$\therefore$ ইমেজ সেট $R = \{3, 9, 19\}$.

উদাহরণ ৫ : পাশের চিত্রে $f : x \to mx + c$ ফাংশনের অংশ থেকে নির্ণয় কর-

(a) m এবং c এর মান

(b) f এর অধীনে 5 এর ইমেজ

(c) ইমেজ 3 হলে এর সদস্য



সমাধান : (a) $f(x) = mx + c$

$f : 2 \to 7 \Rightarrow f(2) = 7$

$i.e. 2m + c = 7 ....(1)$

$f : 4 \to -1 \Rightarrow f(4) = -1$

$i.e. f(4) = 4m + c \Rightarrow 4m + c = -1 ....(2)$

(i) ও (ii) থেকে পাই $m = -4$ এবং $c = 15$

(b) f অধীনে 5 এর ইমেজ $f(5) = -4 \times 5 + 15 = -5$

(c) ধরি x নির্ণয়ে সদস্য সংখ্যা যা র ইমেজ 3 তখন $f(x) = 3 \Rightarrow -4x + 15 = 3 \Rightarrow x = 3$

উদাহরণ ৬। $F = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$ অন্বয়টি কি ফাংশন ? এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

উত্তর : $F = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$ অন্বয়টি একটি ফাংশন। কারণ এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন।

বর্ণিত ফাংশনে $F(-2) = 4, F(-1) = 1, F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 4$

$\therefore$ ডোমেন $F = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{0, 1, 4\}$

A এর বিভিন্ন সদস্যের ছবি লক্ষ করলে দেখা যায় যে, এখানে $x \in A$ এর জন্য $F(x) = x^2$, এ ফাংশনটিকে $F : A \to B, F(x) = x^2$ লিখে প্রকাশ করা যায়।

মন্তব্য : কোনো ফাংশন F এর ডোমেন এবং ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য x এর অনন্য ছবি $F(x)$ নির্দিষ্ট করা হলেই ফাংশনটি নির্ধারিত হয়। অনেক সময় ডোমেন উহ্য রাখা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে ডোমেন হিসেবে R এর ঐ উপসেটকে গ্রহণ করা হয়, যার প্রত্যেক সদস্য x এর জন্য R এ $F(x)$ নির্ধারিত থাকে।

উদাহরণ ৭। $F(x)=\sqrt{1-x}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

$F(-3), F(0), F\left(\frac{1}{2}\right), F(1), F(2)$ এর মধ্যে যেগুলো সংজ্ঞায়িত সেগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান : $F(x)=\sqrt{1-x}\in R$ যদি ও কেবল যদি $1-x\geq 0$ বা $1\geq x$ অর্থাৎ, $x\leq 1$ সুতরাং

ডোম $F=\{x\in R : x\leq 1\}$

এখানে $F(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$

$F(o)=\sqrt{1-0}=\sqrt{1}=1$

$F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

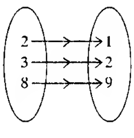
$F(1)=\sqrt{1-1}=0$

$F(2)$ সংজ্ঞায়িত নয়, কেননা $2\notin domF$.

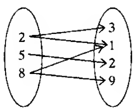
কাজ :

১। নিচের কোন অন্বয়টি ফাংশন নয় ? যুক্তি দাও।

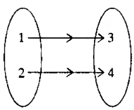
(a)



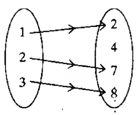
(b)



(c)



(d)



২। $f : x\rightarrow 4x+2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন যার ডোমেন $D=\{-1, 3, 5\}$, তাহলে ফাংশনটির ইমেজ সেট নির্ণয় কর।

৩। প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং কোনগুলো ফাংশন তা নির্ধারণ কর। ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর। যেখানে $A=\{-2,-1,0,1,2\}$

(ক) $S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $x+y=1\}$

(খ) $S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $x-y=1\}$

(গ) $S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $y=x^2\}$

(ঘ) $S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $y^2=x\}$

৪। $f(x)=2x-1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য-

(ক) $F(-2), F(o)$ এবং $F(2)$ নির্ণয় কর।

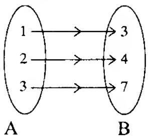
(খ) $F\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$ নির্ণয় কর, যেখানে $a\in R$

(গ) $F(x)=5$ হলে, x নির্ণয় কর।

(ঘ) $F(x)=y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y\in R$

এক-এক ফাংশন *(One-One Function)*

ভেনচিত্রে A এবং B সেটে লক্ষ করি-



ভেনচিত্রে f ফাংশনের অধীনে ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন।

সংজ্ঞা : যদি কোনো ফাংশনের অধীনে এর ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক - এক *(One-One)* ফংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা থেকে দেখা যায়, একটি ফাংশন $f: A\to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হবে, যদি $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ যেখানে $x_1, x_2\in A.$

উদাহরণ ৮। $f(x)=3x+5, x\in R$ একটি এক-এক ফাংশন।

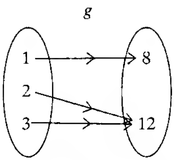
যাচাই : দেওয়া আছে $f(x)=3x+5$

ধরি, $a,b\in R$ তা হলে $f(a)=3a+5$ এবং $f(b)=3b+5$

এখন, $f(a)=f(b)\Rightarrow 3a+5=3b+5\Rightarrow a=b$

সুতরাং f এক-এক ফাংশন।

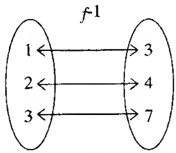
আবার, g এ বর্ণিত ফাংশনটি লক্ষ্য করি যে,

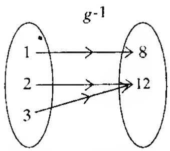


ডোমেনের দুইটি ভিন্ন সদস্যের ছবি একই $g(2) = 12, g(3) = 12$

সুতরাং g ফাংশনটি এক-এক নয়।

উপরের চিত্র দুইটির তীর চিহ্নের $(arrows)$ দিক উল্টো করলে দেখা যায়-





প্রথমটি এক-এক ফাংশন, এই ফাংশনকে বলা হয় f ফাংশনের বিপরীত ফাংশন।

কিন্তু বিপরীত ম্যাপিং যা g এর অধীনে করা হয়েছে তা এক-এক ফাংশন নয়। তাই g ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে না। এখানে এক-এক ফাংশন এবং এর বিপরীত f^{-1} এর মধ্যে সম্পর্ক দেখানো হলো :

f এর অধীন	f^{-1} এর অধীন
$f(1) = 3 \Leftrightarrow$	$f^{-1}(3) = 1$
$f(2) = 4 \Leftrightarrow$	$f^{-1}(4) = 2$
$f(3) = 7 \Leftrightarrow$	$f^{-1}(7) = 3$
$f(a) = b \Leftrightarrow$	$f^{-1}(b) = a$

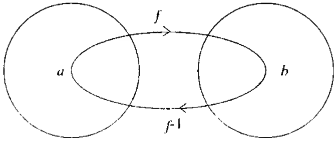
f এক-এক ফাংশন হবে, যদি-

(i) f এর একটি বিপরীত ফাংশন f^{-1} হয়

(ii) b ইমেজ হয় $f(a)$ অধীন $\Leftrightarrow a$ ইমেজ হয় $b = f(b)$ অর্থাৎ $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$

এটিকে চিত্রে দেখানো যায়

$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$



উদাহরণ ৯। দেখাও যে, $F : R \to R, F(x) = x^2$ ফাংশনটি এক-এক নয়।

সমাধান : এখানে ডোম $F = R, x_1 = -1, x_2 = 1$ নিয়ে দেখি যে, $x_1 \in$ ডোম $F, x_2 \in$ ডোম $F, x_1 \neq x_2$

কিন্তু $F(x_1) = F(-1) = (-1)^2 = 1,\ F(x_2) = F(1) = (1)^2 = 1$

অর্থাৎ, $F(x_1) = F(x_2),\ \therefore F$ এক-এক নয়।

দ্রষ্টব্য : কোনো ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ফাংশন নাও হতে পারে।

উদাহরণ ১০। $f(x) = \dfrac{x}{x-2}, x \neq 2$ বর্ণিত ফাংশনের জন্য নির্ণয় কর (ক) $f(5)$ (খ) $f^{-1}(2)$

সমাধান : (ক) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}, x \neq 2$

$$f(5) = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

(খ) ধরি, $a = f^{-1}(2)$ তখন $f(a) = 2$

$$\frac{a}{a-2} = 2 \Rightarrow a = 2a - 4 \Rightarrow a = 4$$

$\therefore f^{-1}(2) = 4$

উদাহরণ ১১। $f(x) = 3x + 1,\ 0 \le x \le 2$

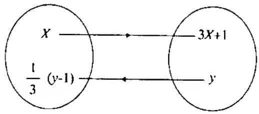
(a) f এর গ্রাফ আঁক এবং রেঞ্জ দেখাও।

(b) দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন।

(c) f^{-1} নির্ণয় কর এবং f^{-1} এর গ্রাফ অঙ্কন কর।

সমাধান : $f(x) = 3x + 1,\ 0 \le x \le 2$

হতে পাই শীর্ষ বিন্দু $(0, 1)$ এবং $(2, 7)$



$\therefore$ রেঞ্জ $f : R = \{y : 1 \le y \le 7\}$

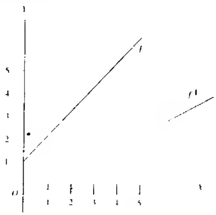
(b) যেহেতু প্রত্যেক $y \in R$ এর জন্য একমাত্র $x \in R$ এর ইমেজ y দেখানো হয়েছে।

সুতরাং f এক-এক ফাংশন।

(c) ধরি, $y = f(x)$, x এর ইমেজ

তাহলে, $y = 3x + 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{3}(y - 1)$



বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \dfrac{1}{3}(y - 1)$

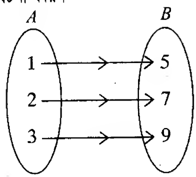
বা, $f^{-1}: y \rightarrow \frac{1}{3}(y-1)$ যা চিত্রে দেখানো হয়েছে।

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই, $f^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{3}(x-1)$

f^{-1} এর অঙ্কিত রেখা $y=\frac{1}{3}(x-1),\ 1 \leq x \leq 7$ দেখানো হয়েছে।

সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন (*Onto Function*)

ভেনচিত্রে ফাংশন f এর অধীনে সেট $A=\{1,2,3\}$ এবং $B=\{5,7,9\}$ বিবেচনা করি।



এখানে $f(1)=5=2\cdot 1+3$ লেখা যায়

অনুরূপ $f(2)=7=2\cdot 2+3$

$f(3)=9=2\cdot 3+3$

সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি $y=f(x)=2x+3$

অতএব, বলা যায় $f(a)=b$

সংজ্ঞা : একটি ফাংশন $f: A \rightarrow B$ কে সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন বলা হবে যদি $f(A)=B$

অথবা, একটি ফাংশন $f: A \rightarrow B$ কে সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন বলা হবে যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি $a \in A$ পাওয়া যায় যেন $f(a)=b$ হয়। আলোচ্য ফাংশন $f: A=\{1,2,3\} \rightarrow B=\{5,7,9\}$ কে $y=f(x)=2x+3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। তবে f একটি সার্বিক ফাংশন।

বিপরীত ফাংশন (*Inverse function*)

মনে করি $f: A \rightarrow B$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন, তা হলে একটি ফাংশন $f^{-1}: B \rightarrow A$ বিদ্যমান আছে যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(b) \in A$ বিদ্যমান। তবে f^{-1} কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

মনে করি, $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow A$ উভয়েই এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তা হলে g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হবে যদি $f(g(x))=g(f(x))=x$ হয় যেখানে $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$. এখানে $g=f^{-1}$

উদাহরণ ১২। যদি $f: R \rightarrow R$ এবং $g: R \rightarrow R$ ফাংশন দুইটি $f(x)=x+5$ এবং $g(x)=x-5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, f এর বিপরীত ফাংশন g ।

সমাধান : দেওয়া আছে $f(x)=x+5$.......(1) এবং

$g(x)=x-5$..................(2)

এখন $f(g(x))=f(x-5)$: [(2) নং দ্বারা]

$=(x-5)+5$ [(1) নং দ্বারা]

$=x$

এবং $g(f(x)) = g(x+5)$ [(1) নং দ্বারা]

$= (x+5)-5$ [(2) নং দ্বারা]

$= x$

যেহেতু $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

সুতরাং f এর বিপরীত ফাংশন g.

উদাহরণ ১৩। যদি $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = x^3 - 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : সংজ্ঞানুসারে, $f(f^{-1}(x)) = x$

$f(y) = x$........(1) [যেহেতু $f^{-1}(x) = y$]]

দেওয়া আছে $f(x) = x^3 - 5$

$\Rightarrow f(y) = y^3 - 5$

$\Rightarrow x = y^3 - 5$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow x + 5 = y^3 \Rightarrow y = (x+5)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore f^{-1}(x) = (x+5)^{\frac{1}{3}}$.

কাজ :

১। নিম্নের প্রতিটি এক-এক ফাংশনের সংশ্লিষ্ট f^{-1} নির্ণয় কর।

(ক) $y = (x+5)^{\frac{1}{3}}$ (খ) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}, x \neq 1$

(গ) $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}, x \neq 2$ (ঘ) $f : x \to \dfrac{2x+3}{2x-1}, x \neq \dfrac{1}{2}$

২। বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-2}, x \neq 2$ এর ক্ষেত্রে

(ক) $f^{-1}(-1)$ এবং $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর।

(খ) x এর মান নির্ণয় কর যেন $4f^{-1}(x) = x$

৩। বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}, x \neq 1$ এর জন্য

(ক) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।

(খ) দেওয়া আছে $f^{-1}(p) = kp, p$ এর সাপেক্ষে k কে প্রকাশ কর।

৪। নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সম্পর্ক F একটি ফাংশন কি না তা নির্ণয় কর। F ফাংশন হলে এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর, উহা এক-এক কি না তা ও নির্ধারণ কর :

(ক) $F\{(x, y) \in R^2 : y = x\}$

(খ) $F\{(x, y) \in R^2 : y = x^2\}$

(গ) $F\{(x,y)\in R^2 : y^2 = x\}$

(ঘ) $F\left\{x,y)\in R^2 : y=\sqrt{x}\right\}$

৫। (a) যদি $f:\{-2-1,0,1,2\}\to\{-8,-1,0,1,8\}$ ফাংশনটি $f(x)=x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।

(b) $f:\{1,2,3,4\}\to R$ একটি ফাংশন যা $f(x)=2x+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন কিন্তু অনটু ফাংশন নয়।

অন্বয় (*Relation*) ও ফাংশনের লেখচিত্র

লেখচিত্র হলো ফাংশনের জ্যামিতিক উপস্থাপন। $y=f(x)$ লেখচিত্র অংকনের জন্য 'O' বিন্দুতে পরস্পর ছেদী লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' লওয়া হয়। O কে মূলবিন্দু XOX' কে x অক্ষ এবং YOY' কে y অক্ষ বলা হয়।

$y=f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য $a\le x\le b$ ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x এবং অধীন চলক y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করতে হয়। অত:পর তালিকার সীমিত সংখ্যক বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করতে হয়। প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করলে $y=f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়। মাধ্যমিক বীজগণিতে লেখচিত্র সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা প্রদান করা হয়েছে। এখানে, সরলরৈখিক (*Linear*) ফাংশন, দ্বিঘাত (*Quadratic*) ফাংশন এবং বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

সরলরৈখিক ফাংশন

সরলরৈখিক ফাংশন এর সাধারণ রূপ হলো $f(x)=mx+b$

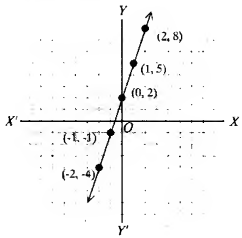
যেখানে, m এবং b বাস্তব সংখ্যা। এর লেখচিত্র একটি রেখা যার ঢাল হলো m এবং y অক্ষের ছেদক b।

এখানে, ধরি $m=3$ এবং $b=2$, তাহলে ফাংশনটি দাঁড়ায় $f(x)=3x+2$

বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায় :

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8

$\therefore$ $f(x)=3x+2$ এর লেখ নিম্নে দেখানো হলো :



দ্বিঘাত ফাংশন (*Quadratic function*)

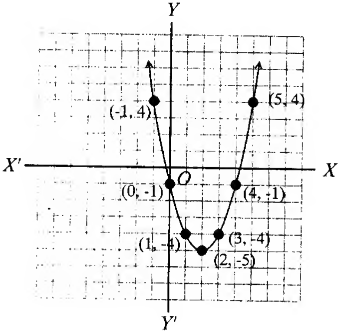
দ্বিঘাত ফাংশন হলো একটি ফাংশন যা $y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত যেখানে a, b এবং c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$.

প্রদত্ত ফাংশনে ধরি $a = 1, b = -4, c = -1$

তাহলে $y = ax^2 + bx + c$ কে লেখা যায় $y = x^2 - 4x - 1$

বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়।

x	$x^2 - 4x - 1$	y
-1	$(-1)^2 - 4(-1) - 1$	4
0	$0^2 - 4(0) - 1$	-1
1	$1^2 - 4(1) - 1$	-4
2	$2^2 - 4(2) - 1$	-5
3	$3^2 - 4(3) - 1$	-4
4	$4^2 - 4(4) - 1$	-1
5	$5^2 - 4(5) - 1$	4



ইহা নির্ণেয় দ্বিঘাত ফাংশন-এর লেখচিত্র।

এই দ্বিঘাত ফাংশন এর কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য লক্ষ্য করি।

(*i*) পরাবৃত্ত আকার

(*ii*) y অক্ষের সমান্তরাল রেখা বা y অক্ষ বরাবর প্রতিসাম্য বিন্দু পাওয়া যাবে।

(*iii*) একটি বিন্দুতে ফাংশনটির মান ক্ষুদ্রতম বা বৃহত্তম হবে।

বৃত্তের লেখচিত্র

উল্লেখ্য যে p, q ও r ধ্রুবক এবং $r \neq 0$ হলে R এ $S = \{(x, y) : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2\}$ অন্বয়ের লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ r (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য)।

ছক কাগজে (p, q) বিন্দু পাতন করে ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করে লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

মন্তব্য : যে অন্বয়ের সমাধান সেট অসীম, এর লেখচিত্র অঙ্কনের স্বীকৃত পদ্ধতি হলো যথেষ্ট সংখ্যক সমাধানের প্রতিরূপী বিন্দু ছক কাগজে পাতন করে সাবলীলভাবে (........) ঐ সব বিন্দু যোগ করা, যাতে অন্বয়টির লেখচিত্রের ধরন দ্ব্যর্থহীনভাবে বোঝা যায়।

কিন্তু যে অন্বয়ের লেখচিত্র বৃত্ত, এর জন্য কম্পাস ব্যবহার করলে কাজ সহজ ও সুন্দর হয় বিধায় শেষোক্ত পন্থা অবলম্বন করা হলো।

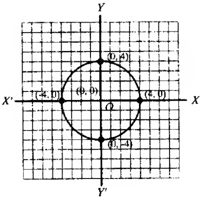
উদাহরণ ১৪।

$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 16\}$

বা, $x^2 + y^2 = 4^2$

সুতরাং S এর লেখচিত্র একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র C $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = 4$.

S এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হলো :



কাজ :

১। নিম্নের ফাংশনের সাধারণ রূপ (Standard Form) লিখ :

(ক) $y-2=3(x-5)$ (খ) $y-2=\frac{1}{2}(x+3)$

(গ) $y-(5)=-2(x+1)$ (ঘ) $y-5=\frac{4}{3}(x-3)$

২। লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(ক) $y=3x-1$ (খ) $x+y=3$

(গ) $x^2+y^2=9$ (ঘ) $y=\frac{1}{3}x+1.$

অনুশীলনী ১·২

১। $\{(2,2),(4,2),(2,10),(7,7)\}$ অন্বয়ের ডোমেন কোনটি ?

(ক) $\{2,4,7\}$ (খ) $\{2,2,10,7\}$

(গ) $\{2,2,10,7\}$ (ঘ) $\{2,4,2,5,7\}$

২। $S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $y=x^2\}$ এবং $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ নিচের কোনটি S অন্বয়ের সদস্য ?

(ক) $(2,4)$ (খ) $(-2,4)$

(গ) $(-1,1)$ (ঘ) $(1,-1)$

৩। যদি $S=\{(1,4),(2,1),(3,0),(4,1),(5,4)\}$ হয় তবে,

(i) S অন্বয়ের রেঞ্জ $S=\{4,1,0,4\}$

(ii) S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়, $S^{-1}=\{(4,1),(1,2),(0,3),(1,4),(4,5)\}$

(iii) S অন্বয়টি একটি ফাংশন

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে নিচের ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

যদি $F(x)=\sqrt{x-1}$ হয়, তবে-

৪। $F(10) =$ কত ?

(ক) 9 (খ) 3 (গ) -3 (ঘ) $\sqrt{10}$

৫। $f(x) = 5$ হলে, x এর মান কত ?

(ক) 5 (খ) 24 (গ) 25 (ঘ) 26

৬। ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি ?

(ক) ডোম $F = \{x \in R : x \neq 1\}$ (খ) ডোম $F = \{x \in R : x \geq 1\}$

(গ) ডোম $F = \{x \in R : x \leq 1\}$ (ঘ) ডোম $F = \{x \in R : x > 1\}$

৭। (a) প্রদত্ত S অন্বয়ের ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।

(b) S অথবা S^{-1} ফাংশন কি না তা নির্ধারণ কর।

(c) ফাংশনগুলো এক-এক কি না ?

(ক) $S = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20)\}$

(খ) $S = \{(-3,8), (-2,3), (-1,0), (0,-1), (1,0), (2,3), (3,8)\}$

(গ) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

(ঘ) $S = \{(-3,-3), (-1,-1), (0,0), (1,1), (3,3)\}$

(ঙ) $S = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$

৮। $F(x) = \sqrt{x-1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য –

(ক) $F(1)$, $F(5)$, এবং $F(10)$ নির্ণয় কর। (খ) $F(a^2+1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in R$।

(গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর। (ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$।

৯। $F : R \rightarrow R, F(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য –

(ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর। (খ) দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন নয়।

১০। (ক) $f : R \rightarrow R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = ax + b; a, b \in R$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।

(খ) $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ ফাংশনটি $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, তবে দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।

১১। (ক) যদি $f : R \rightarrow R$ এবং $g : R \rightarrow R$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x^3 + 5$ এবং $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, $g = f^{-1}$

১২। R বাস্তব সংখ্যার সেট হলে এবং $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - x - 2$ দ্বারা প্রদত্ত হলে $f^{-1}([-2, 0])$ এবং $f^{-1}(\{0\})$ নির্ণয় কর।

১৩। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে :

(ক) $S = \{(x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$ (খ) $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$

(গ) $S = \{(x, y) : 3x + y = 4\}$ (ঘ) $S = \{(x, y) : x = -2\}$

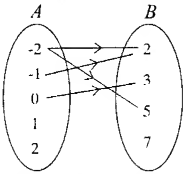
১৪। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে:

(ক) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$

(খ) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$

১৫। $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{2, 3, 5, 7\}$

A সেটের কয়েকটি উপাদানের সাথে B সেটের উপাদানগুলোকে অন্বিত করে নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো :



(ক) গঠিত অন্বয়টি D হলে, D এর মান ক্রমজোড়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x = y^2\}$ অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা করে ডোম S এবং রেঞ্জ S নির্ণয় কর।

(গ) উপরে বর্ণিত অন্বয়টির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র হতে নির্ণয় কর।

১৬। $F(x) = 2x - 1$

(ক) $F(x+1)$ এবং $F\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক কি না তা নির্ণয় কর, যখন $x, y \in N$

(গ) $F(x) = y$ হলে x এর তিনটি মান নির্ণয় কর, যখন $x, y \in N$ এবং $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

(Algebraic Expression)

বিভিন্ন প্রকারের বীজগাণিতিক রাশির সঙ্গে আমরা পরিচিত। এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে $+, -, \times, \div$ ঘাত বা মূলদ চিহ্নের যেকোনো একটি অথবা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয়, একে বীজগাণিতিক রাশি *(Algebraic expression)* বা সংক্ষেপে রাশি বলা হয়। যেমন, $2x, 2x+3ay,\ 6x+4y^2+a+\sqrt{z}$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- বহুপদীর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- উদাহরণের সাহায্যে এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বহুপদীর গুণ ও ভাগ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভাগশেষ উপপাদ্য ও উৎপাদক উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং তা প্রয়োগ করে বহুপদীর উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- সমমাত্রিক রাশি,প্রতিসম রাশি এবং চক্র-ক্রমিক রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমমাত্রিক রাশি, প্রতিসম রাশি এবং চক্র-ক্রমিক রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে পারবে।
- মূলদ ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারবে।

২·১ আলোচ্য অধ্যায়ে সংখ্যা বলতে আমরা বাস্তব সংখ্যাই বুঝব। A, B, C ইত্যাদি রাশিগুলোর কোনোটিই যদি একাধিক রাশির যোগফল বা বিয়োগফল না হয়, তবে এদের প্রত্যেকটিকে $A+B+C+\ldots\ldots\ldots$ আকারের রাশির এক একটি **পদ** বলা হয়। যেমন, $5x+3y^2-2b+\sqrt{2}$ রাশিটিতে $5x, 3y^2, -2b, \sqrt{2}$ এক একটি পদ।
কোনো আলোচনায় সংখ্যা নির্দেশক একটি অক্ষর প্রতীক বা চলক (*Variable*) বা ধ্রুবক (Constant) হতে পারে। যদি এরূপ একটি প্রতীক একাধিক সদস্যবিশিষ্ট কোনো সংখ্যা সেটের যেকোনো অনির্ধারিত সদস্য নির্দেশ করে, তবে প্রতীকটিকে চলক বলা হয় এবং সেটটিকে এর **ডোমেন** বলা হয়। যদি প্রতীকটি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা নির্দেশ করে, তবে একে **ধ্রুবক** বলা হয়।
কোনো আলোচনায় একটি চলক, এর ডোমেন থেকে যেকোনো মান গ্রহণ করতে পারে। কিন্তু একটি ধ্রুবকের মান কোনো আলোচনায় নির্দিষ্ট থাকে।

বহুপদী :

বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধু অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়।

এক চলকের বহুপদী :

মনে করি, x একটি চলক। তাহলে, (১) a, (২) $ax+b$ (৩) ax^2+bx+c (৪) ax^3+bx^2+cx+d ইত্যাদি আকারের রাশিকে x চলকের বহুপদী বলা হয়, যেখানে, a,b,c,d ইত্যাদি নির্দিষ্ট সংখ্যা (ধ্রুবক)। সাধারণভাবে, x চলকের বহুপদীর পদসমূহ Cx^p আকারে হয়, যেখানে C একটি (x-বর্জিত) নির্দিষ্ট সংখ্যা (যা শূন্যও হতে পারে) এবং p একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। p শূন্য হলে পদটি শুধু C হয় এবং C শূন্য হলে পদটি বহুপদীতে অনুল্লেখ থাকে। Cx^p পদে C কে x^p এর সহগ (*Coefficient*) এবং p কে এই পদের মাত্রা বা ঘাত (degree) বলা হয়।

কোনো বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়। বহুপদীতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদটিকে মুখ্যপদ ও মুখ্যপদের সহগকে মুখ্যসহগ এবং 0 মাত্রাযুক্ত অর্থাৎ, চলক-বর্জিত পদটিকে ধ্রুবপদ বলা হয়। যেমন, $2x^6-3x^5-x^4+2x-5$, x চলকের একটি বহুপদী, যার মাত্রা 6, মুখ্যপদ $2x^6$, মুখ্যসহগ 2 এবং ধ্রুবপদ -5।

$a\neq 0$ হলে, পূর্বোক্ত (১) বহুপদীর মাত্রা 0, (২) বহুপদীর মাত্রা 1, (৩) বহুপদীর মাত্রা 2 এবং (৪) বহুপদীর মাত্রা 3। যেকোনো অশূন্য ধ্রুবক ($a\neq 0$)) চলকের 0 মাত্রার বহুপদী ($a=ax^0$ বিবেচ্য)। 0 সংখ্যাটিকে শূন্য বহুপদী বিবেচনা করা হয় এবং শূন্য বহুপদীর মাত্রা অসংজ্ঞায়িত ধরা হয়।

x চলকের বহুপদীকে সাধারণত x এর ঘাতের অধঃক্রমে (অর্থাৎ, মুখ্যপদ থেকে শুরু করে ক্রমে ক্রমে ধ্রুব পদ পর্যন্ত) বর্ণনা করা হয়। এরূপ বর্ণনাকে বহুপদীটির আদর্শ রূপ (Standard form) বলা হয়।

ব্যবহারের সুবিধার্থে x চলকের বহুপদীকে $P(x), Q(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হলো।

যেমন, $P(x)=2x^2+7x+5$

এরূপ $P(x)$ প্রতীকে x এর উপর বহুপদীটির মানের নির্ভরতা নির্দেশ করে। $P(x)$ বহুপদীতে x চলকের পরিবর্তে কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা a বসালে বহুপদীটির যে মান পাওয়া যায়, একে $P(a)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ ১। যদি $P(x)=3x^3+2x^2-7x+8$ হয়, তবে $P(0), P(1), P(-2), P\left(\frac{1}{2}\right), P(2)$ এবং $P(a)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত বহুপদীতে x এর পরিবর্তে পর্যায়ক্রমে, $0, 1, -2, \frac{1}{2}, 2, a$ বসিয়ে পাই,

$$P(0)=3(0)^3+2(0)^2-7(0)+8=8$$

$$P(1)=3(1)^3+2(1)^2-7(1)+8=6$$

$$P(-2)=3(-2)^3+2(-2)^2-7(-2)+8=6$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{1}{2}\right)+8=\frac{43}{8}$$

$$P(a)=3a^3+2a^2-7a+8$$

দুই চলকের বহুপদী

$$2x + 3y - 1$$
$$x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 7y + 1$$
$$8x^3 + y^3 + 10x^2y + 6xy^2 - 6x + 2$$

এগুলো x ও y চলকের বহুপদী। সাধারণভাবে এরূপ বহুপদীর পদগুলো $Cx^p x^q$ আকারের হয় যেখানে C একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা (ধ্রুবক) এবং p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $Cx^p x^q$ পদে C হচ্ছে $x^p x^q$ এর সহগ এবং $p+q$ হচ্ছে এই পদের মাত্রা। এরূপ বহুপদীকে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়। এরূপ বহুপদীকে $p(x, y)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $p(x, y) = 8x^3 + y^3 - 4x^2 + 7xy + 2y - 5$ বহুপদীর মাত্রা 3 এবং $P(1, 0) = 8 - 4 - 5 = -1$.

তিন চলকের বহুপদী

x, y ও z চলকের বহুপদীর পদগুলো $Cx^p x^q z^r$ আকারের হয়। যেখানে C (ধ্রুবক) পদটির সহগ এবং p, q, r অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। $(p+q+r)$ কে এই পদের মাত্রা এবং বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়। এরূপ বহুপদীকে $P(x, y, z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ বহুপদীর মাত্রা 3 এবং $P(1, 1, -2) = 1 + 1 - 8 + 6 = 0$ ।

মন্তব্য : দুইটি বহুপদীর যোগফল, বিয়োগফল এবং গুণফল সব সময় বহুপদী হয়। কিন্তু বহুপদীর ভাগফল বহুপদী হতেও পারে অথবা নাও হতে পারে।

কাজ :

১। নিচের কোনটি বহুপদী নির্ণয় কর :

(ক $2x^3$ (খ) $7 - 3a^2$ (গ) $x^3 + x^{-2}$

(ঘ) $\dfrac{a^2 + a}{a^3 - a}$ (ঙ) $5x^2 - 2xy + 3y^2$ (চ) $6a + 3b$

(ছ) $C^2 + \dfrac{2}{0} - 3$ (জ) $3\sqrt{n-4}$ (ঝ) $2x(x^2 + 3y)$

(ঞ) $3x - (2y + 4z)$ (ট) $\dfrac{6}{x} + 2y$ (ঠ) $\dfrac{3}{4}x - 2y$

২। প্রতিপদের সংখ্যা অনুযায়ী বহুপদী চিহ্নিত কর :

(ক) $x^2 + 10x + 5$ (খ) $3a + 2b$ (গ) $4xyz$

(ঘ) $2m^2n - mn^2$ (ঙ) $7a + b - 2$ (চ) $6a^2b^2c^2$

৩। নিচের বহুপদীগুলোর প্রত্যেকটি (i) x চলকের বহুপদীর আদর্শ রূপ তা বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর। (ii) y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

(ক) $3x^2 - y^2 + x - 3$ (খ) $x^2 - x^6 + x^4 + 3$ (গ) $5x^2y - 4x^4y^4 - 2$

(ঘ) $x + 2x^2 + 3x^3 + 6$ (ঙ) $3x^3y + 2xyz - x^4$

৪। যদি $P(x) = 2x^2 + 3$ হয়, তবে $P(5)$, $P(6)$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

ভাগ সূত্র :

যদি $D(x)$ ও $N(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী হয় এবং $D(x)$ এর মাত্রা) $\leq (N(x)$ এর মাত্রা) হয়, তবে সাধারণ নিয়মে $D(x)$ দ্বারা $N(x)$ কে ভাগ করে ভাগফল $Q(x)$ ভাগশেষ $R(x)$ পাওয়া যায়। যেখানে,

(১) $Q(x)$ ও $R(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী

(২) $Q(x)$ এর মাত্রা) $= N(x)$ এর মাত্রা $- D(x)$ এর মাত্রা

(৩) $R(x) = 0$ অথবা $R(x)$ এর মাত্রা $< (D(x)$ এর মাত্রা

(৪) সকল x এর জন্য $N(x) = D(x)Q(x) + R(x)$

মন্তব্য : (৪) নং নিয়মকে ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ হিসেবে উল্লেখ করা হয়।

সমতা সূত্র :

(১) যদি সকল x এর জন্য $ax+b = px+q$ হয়, তবে $x = 0$ ও $x = 1$ বসিয়ে পাই, $b = q$ এবং $a+b = p+q$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a = p, b = q$

(২) যদি সকল x এর জন্য $ax^2+bx+c = px^2+qx+r$ হয়, তবে $x = 0, x = 1$ ও $x = -1$ বসিয়ে পাই, $c = r$, $a+b+c = p+q+r$ এবং $a-b+c = p-q+r$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a = p$, $b = q, c = r$.

(৩) সাধারণভাবে দেখা যায় যে, যদি সকল x এর জন্য $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots a_{n-1}x + a_n$ $= p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1}x + p_n$ হয়, তবে, $a_0 = p_0, a_1 = p_1, \ldots\ldots, a_{n-1} = p_{n-1}$ $a_n = p_n$ অর্থাৎ, সমতা চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর একই ঘাতযুক্ত সহগদ্বয় পরস্পর সমান।

মন্তব্য : x চলকের n মাত্রার বহুপদীর বর্ণনার সহগগুলোকে a_0 (a সাব-জিরো), a_1 (a সাব-ওয়ান) ইত্যাদি নেওয়া সুবিধাজনক।

দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সকল x এর জন্য সমান হলে, এদের সমতাকে অভেদ বলা হয় এবং তা বোঝাতে অনেক সময় $P(x) \cong Q(x)$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি অভিন্ন হয়। $\cong$ চিহ্নকে অভেদ চিহ্ন বলা হয়। সাধারণভাবে, দুইটি বীজগণিতীয় রাশির সমতাকে অভেদ (*identity*) বলা হয়, যদি রাশি দুইটিতে কোনো একটি চলকের ডোমেন একই হয় এবং চলকসমূহের ডোমেনভুক্ত মানের জন্য রাশি দুইটির মান সমান হয়। যেমন, $x(y+z) = xy + xz$ একটি অভেদ।

২·২ ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য

এই অনুচ্ছেদে শুধু x চলকের বহুপদী বিবেচনা করা হবে। প্রথমে দুইটি উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ ১। যদি $P(x)=x^2-5x+6$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(x-4)$ দ্বারা ভাগ কর এবং দেখাও যে, ভাগশেষ $P(4)$ এর সমান।

সমাধান : $P(x)$ কে $x-4$ দ্বারা ভাগ করি,

$$
\begin{array}{r}
x-4)\,x^2-5x+6\,(x-1 \\
\underline{x^2-4x} \\
-x+6 \\
\underline{-x+4} \\
2
\end{array}
$$

এখানে ভাগশেষ 2,

যেহেতু $P(4)=4^2-5(4)+6=2.$

সুতরাং, ভাগশেষ $P(4)$ এর সমান।

উদাহরণ ২। যদি $P(x)= ax^3+bx+c$ হয়, তবে $P(x)$ কে $x-m$ দ্বারা ভাগ করে দেখাও যে, ভাগশেষ $P(m)$ এর সমান।

সমাধান : $P(x)$ কে $x-m$ দ্বারা ভাগ করি,

$$
\begin{array}{r}
x-m)\,ax^3+bx+c\,(ax^2+amx+am^2+b \\
\underline{ax^3-amx^2} \\
amx^2+bx+c \\
\underline{amx^2-am^2x} \\
(am^2+b)x+c \\
\underline{(am^2+b)x-(am^2+b)m} \\
am^3+bm+c
\end{array}
$$

এখানে ভাগশেষ $= am^3+bm+c$

আবার, $P(m)=am^3+bm+c$, সুতরাং ভাগশেষ $P(m)$ এর সমান।

এই উদাহরণ দুইটি থেকে নিম্নের প্রতিজ্ঞাটি সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়।

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

প্রতিজ্ঞা ১। যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয়, তবে $P(x)$কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে।

প্রমাণ : $P(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 0 অথবা অশূন্য ধ্রুবক হবে।

মনে করি, ভাগশেষ R এবং ভাগফল $Q(x)$ তাহলে, ভাগের নিয়মে, সকল x এর জন্য-

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R............(1)$$

(1) নং এ $x=a$ বসিয়ে পাই, $P(a)=0\cdot Q(a)+R=R.$

সুতরাং, $P(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে।

উদাহরণ ৩। $P(x) = x^3 - 8x^2 + 6x + 60$ বহুপদীকে $x+2$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষ কত হবে ?

সমাধান : যেহেতু $x - a = x + 2$, $\therefore\ x + 2 = x - (-2) \Rightarrow a = -2$

সুতরাং, ভাগশেষ $p(-2) = (-2)^3 - 8(-2)^2 + 6(-2) + 60 = 8$

প্রতিজ্ঞা ১ এর অনুকরণে প্রমাণ করা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা ২। যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $P(x)$ কে $ax+b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P\left(\frac{-b}{a}\right)$ হবে।

উদাহরণ ৪। বহুপদী $P(x) = 36x^2 - 8x + 5$ কে $(2x-1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ?

সমাধান : নির্ণেয় ভাগশেষ $P\left(\frac{1}{2}\right) = 36\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = 9 - 4 + 5 = 10$

উদাহরণ ৫। যদি $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $P(x)$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$$P(2) = 5(2)^3 + 6(2)^2 - a(2) + 6$$
$$= 40 + 24 - 2a + 6$$
$$= 70 - 2a$$

শর্তানুসারে, $70 - 2a = 6$

বা $2a = 70 - 6 = 64 \Rightarrow a = 32$

উদাহরণ ৬। যদি $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ হয় এবং $P(x)$ কে $x-a$ এবং $x-b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$.

সমাধান : $P(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

এবং $P(x)$ কে $x-b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(b) = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

শর্তানুসারে, $a^3 + 5a^2 + 6a + 8 = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

বা, $a^3 - b^3 + 5(a^2 - b^2) + 6(a-b) = 0$

বা, $(a-b)(a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6) = 0$

$\therefore\ a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$, যেহেতু $(a-b) \neq 0$ $i.e$ $a \neq b$.

উৎপাদক উপপাদ্য (*Factor theorem*)

প্রতিজ্ঞা ৩। যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $P(a)=0$ হয়, তবে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x-a$ হবে।

প্রমাণ : $P(x)$ বহুপদীকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $= P(a)$ [ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী]

$= 0$ [প্রদত্ত শর্ত থেকে]

অর্থাৎ $P(x)$ বহুপদী $x-a$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ $x-a$ হচ্ছে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

প্রতিজ্ঞা ৪। যদি $P(x)$ বহুপদীর $x-a$ একটি উৎপাদক হয়, তবে দেখাও যে, $P(a)=0$

প্রমাণ : যেহেতু $P(x)$ বহুপদীর $x-a$ একটি উৎপাদক, সুতরাং আরেকটি বহুপদী $Q(x)$ পাওয়া যায় যেন, $P(x)=(x-a)Q(x)$

এখানে $x=a$ বসিয়ে দেখা যায় যে, $P(a)=(a-a)Q(a)=0\cdot Q(a)=0.$

উদাহরণ ৭। দেখাও যে, $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ বহুপদীর $x-1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি $a+b+c+d=0$ হয়।

সমাধান : মনে করি, $a+b+c+d=0$

তাহলে, $P(1)=a+b+c+d=0$ [শর্তানুসারে]

সুতরাং, $x-1, P(x)$ এর একটি উৎপাদক [উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে]

এবার মনে করি, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x-1$

তবে, উৎপাদকের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই, $P(1)=0$ অর্থাৎ $a+b+c+d=0$.

মন্তব্য : ধনাত্মক মাত্রার যেকোনো বহুপদীর $x-1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি 0 হয়।

উদাহরণ ৮। মনে করি, $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা, $a\neq 0, d\neq o$ এবং $x-r$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক। দেখাও যে, (ক) যদি r পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে r, d এর উৎপাদক হবে। (খ) যদি $r=\dfrac{p}{q}$ লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশিত মূলদ সংখ্যা হয়, তবে p, d এর উৎপাদক ও q, a এর উৎপাদক হবে।

সমাধান : (ক) উৎপাদক উপপাদ্য থেকে দেখা যায় যে, $P(r)=ar^3+br^2+cr+d=0$

বা, $(ar^2+br+c)r=-d$

যেহেতু (ar^2+br+c), r ও d প্রত্যেকেই পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং, r, d এর একটি উৎপাদক।

(খ) উৎপাদক উপপাদ্য থেকে দেখা যায় যে, $P(r)=ar^3+br^2+cr+d=0$

বা, $P\left(\frac{p}{q}\right) = a\left(\frac{p}{q}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c\left(\frac{p}{q}\right) + d = 0$

বা, $ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = 0......(1)$

(1) থেকে পাওয়া যায় $(ap^2 + bpq + cq^2)p = -dq^3 ....(2)$

এবং $(bp^2 + cqp + dq^2)q = -ap^3 ....(3)$

এখন, $ap^2 + bpq + cq^2, bp^2 + cpq + dq^2, p, q, d, a$ প্রত্যেকেই পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং (2) থেকে পাওয়া যায়, p, dq^3 এর একটি উৎপাদক এবং (3) থেকে পাওয়া যায়, q, ap^3 এর একটি উৎপাদক। কিন্তু p ও q এর ± 1 ছাড়া কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই। সুতরাং p, d এর একটি উৎপাদক এবং q, a এর একটি উৎপাদক।

দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণ থেকে আমরা লক্ষ করি যে, উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে পূর্ণসাংখ্যিক সহগবিশিষ্ট বহুপদী $P(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে $P(r)$ এবং পরে $P\left(\frac{r}{s}\right)$ পরীক্ষা করা যেতে পারে, যেখানে, r বহুপদীটির ধ্রুব পদের বিভিন্ন উৎপাদক ($r = \pm 1$ সহ) এবং S বহুপদীটির মুখ্য সহগের বিভিন্ন উৎপাদক ($S = \pm 1$ সহ)।

উদাহরণ ৯। $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : প্রদত্ত বহুপদীর সহগসমূহ পূর্ণসংখ্যা এবং ধ্রুব পদ $= -6$, মুখ্য সহগ $= 1$

এখন r যদি পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $P(x)$ এর যদি $x - r$ আকারের কোনো উৎপাদক থাকে, তবে r অবশ্যই -6 এর উৎপাদক অর্থাৎ, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ এর কোনোটি হবে। এখন r এর এরূপ বিভিন্ন মানের জন্য $P(x)$ পরীক্ষা করি।

$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0; \therefore\ x - 1, p(x)$ এর একটি উৎপাদক

$p(-1) = -1 - 6 - 11 - 6 \neq 0; \therefore\ x + 1, p(x)$ এর উৎপাদক নয়

$p(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0; \therefore\ x - 2, p(x)$ এর একটি উৎপাদক

$p(-2) = -8 - 24 - 22 - 6 \neq 0; \therefore\ x + 2, p(x)$ এর উৎপাদক নয়

$p(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0; \therefore\ x - 3, p(x)$ এর একটি উৎপাদক

যেহেতু, $P(x)$ এর মাত্রা 3 এবং তিনটি 1 মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে, সুতরাং $P(x)$ এর অন্য কোন উৎপাদক যদি থাকে তবে তা ধ্রুবক হবে।

$\therefore\ P(x) = k(x-1)(x-2)(x-3)$, যেখানে k ধ্রুবক।

উভয়পক্ষে x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ বিবেচনা করে দেখা যায় যে, $k = 1$

সুতরাং, $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

দ্রষ্টব্য : কোনো বহুপদী $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য প্রথমে $(x-r)$ আকারের একটি উৎপাদক নির্ণয় করে $P(x)$ কে সরাসরি $(x-r)$ দ্বারা ভাগ করে অথবা $P(x)$ এর পদসমূহকে পুনর্বিন্যাস করে $P(x)$ কে $P(x)=(x-r)Q(x)$ আকারে লেখা যায়। সেখানে $Q(x)$ বহুপদীর মাত্রা $P(x)$ এর মাত্রা থেকে 1 কম। অতঃপর $Q(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয় করে অগ্রসর হতে হয়।

উদাহরণ ১০। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$18x^3+15x^2-x-2$$

সমাধান : মনে করি, $P(x)=18x^3+15x^2-x-2$

$P(x)$ এর ধ্রুব পদ -2 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_1=\{1,-1,2,-2\}$.

$P(x)$ এর মুখ্য সহগ 18 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_2=\{1,-1,2,-2,3-3,6,-6,9,-9,18,-18,\}$

এখন $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a=\frac{r}{s}$ এবং $r\in F_1$, $s\in F_2$

$a=1$ হলে, $P(1)=18+15-1-2\neq 0$

$a=-1$ হলে, $P(-1)=18+15-1-2\neq 0$

$a=-\frac{1}{2}$ হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right)=-18\left(\frac{1}{8}\right)+15\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-2$

$$=\frac{-9}{4}+\frac{15}{4}+\frac{1}{2}-2$$

$$=\frac{17}{4}-\frac{17}{4}=0$$

সুতরাং $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x+1)$ অর্থাৎ, $(2x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $18x^3+15x^2-x-2=18x^3+9x^2+6x^2+3x-4x-2$

$$=9x^2(2x+1)+3x(2x+1)-2(2x+1)$$

$$=(2x+1)(9x^2+3x-2)$$

এবং $9x^2+3x-2=9x^2+6x-3x-2$

$$=3x(3x+2)-1(3x+2)$$

$$=(3x+2)(3x-1)$$

$\therefore\ P(x)=(2x+1)(3x+2)(3x-1)$

কাজ :

১। যদি $P(x)=2x^4-6x^3+5x-2$ হয়, তবে $P(x)$ কে নিম্নলিখিত বহুপদী দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর।

(i) $x-1$ (ii) $x-2$ (iii) $x+2$ (iv) $x+3$ (v) $2x-1$ (vi) $2x+1$

২। ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে ভাগশেষ নির্ণয় কর।

(i) ভাজ্য : $4x^3-7x+10$, ভাজক : $x-2$

(*ii*) ভাজ্য : $5x^3-11x^2-3x+4$, ভাজক : $x+1$

(*iii*) ভাজ্য : $2y^3-y^2-y-4$, ভাজক : $y+3$

(*iv*) ভাজ্য : $2x^3+x^2-18x+10$, ভাজক : $2x+1$

৩। দেখাও যে, $3x^3-4x^2+4x-3$ এর একটি উৎপাদক $(x-1)$

৪। $2x^3+x^2+ax-9$, বহুপদীর একটি উৎপাদক $x+3$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

৫। দেখাও যে, x^3-4x^2+4x-3 বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-3$।

৬। যদি $P(x)=2x^3-5x^2+7x-8$ হয়, তবে $P(x)$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে একে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

৭। দেখাও যে, $4x^3-5x^2+5x-2$ বহুপদীর $x+1$ এবং $x-1$ সাধারণ উৎপাদক

৮। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(*i*) x^3+2x^2-5x-6 (*ii*) x^3+4x^2+x-6

(*iii*) $a^3-a^2-10a-8$ (*iv*) $x^4+3x^3+5x^2+8x+5$

সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্র-ক্রমিক রাশি

সমমাত্রিক বহুপদী : কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, একে **সমমাত্রিক বহুপদী** (*Homogeneous Polynomial*) বলা হয়। $x^2+2xy+5y^2$ রাশিটি x, y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 2)।

$ax^2+2hxy+by^2$ রাশিটি x, y চলকের একটি দুই মাত্রার সমমাত্রিক রাশি, যেখানে, a, h, b নির্দিষ্ট সংখ্যা। x, y, a, h, b প্রত্যেককে চলক বিবেচনা করা হলে এটি এই চলকসমূহের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী হয়। $2x^2y+y^2z+9z^2x-5xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী। (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)।

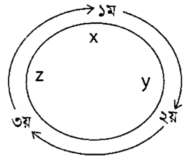
প্রতিসম রাশি (*Symmetric*)

একাধিক চলক ধারণকারী কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলক স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের **প্রতিসম** (*Symmetric*) রাশি বলা হয়।
$a+b+c$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ, a, b, c চলক তিনটির যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। একইভাবে, $ab+bc+ca$ রাশিটি a, b, c চলকের এবং $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি।

কিন্তু $2x^2+5xy+6y^2$ রাশিটি x ও y চলকের প্রতিসম নয় কারণ রাশিটিতে x ও y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ে $2y^2+5xy+6x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

চক্র-ক্রমিক রাশি (*Cyclic*)

তিনটি চলক সম্বলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশিতে প্রথম চলক দ্বিতীয় চলকের, দ্বিতীয় চলক তৃতীয় চলকের এবং তৃতীয় চলকের স্থলে প্রথম চলক বসালে রাশিটি যদি পরিবর্তিত না হয়, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের উল্লিখিত ক্রমে একটি চক্র-ক্রমিক রাশি বা চক্র প্রতিসম রাশি বা *(Cyclically symmetic expression)* বলা হয়। চলকগুলোর স্থান পরিবর্তন পাশের চিত্রের মতো চক্রাকারে করা হয় বলেই এরূপ রাশিকে চক্র -ক্রমিক রাশি বলা হয়ে থাকে।



$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে x এর পবিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই থাকে। একইভাবে $x^2y+y^2z+z^2x$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

$x^2-y^2+z^2$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি নয়, কারণ এতে x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসালে রাশিটি $y^2-z^2+x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

তিনটি চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়। যেমন, $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক, কিন্তু প্রতিসম নয়। কারণ, রাশিটিতে x এবং y স্থান বিনিময় করলে $y^2(x-z)+x^2(z-y)+z^2(y-x)$ রাশি পাওয়া যায় যা পূর্বের রাশিটি থেকে ভিন্ন।

দ্রষ্টব্য : বর্ণনার সুবিধার্থে x, y চলকের রাশিকে $F(x,y)$ আকারের এবং x, y, z চলকের রাশিকে $F(x,y,z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ ১। দেখাও যে, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্রক্রমিক।

$\left[F(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right]$ ধরে নিজে কর

চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

এরূপ বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার কোনো ধরা-বাঁধা নিয়ম নেই। সাধারণত, রাশিটির পদগুলোকে পুনর্বিন্যাস করে উৎপাদক বের করা হয়। অনেক সময় রাশিটিকে কোনো একটি চলকের বহুপদী ধরে উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে এক বা একাধিক উৎপাদক নির্ণয় করা হয় এবং রাশিটির চক্র-ক্রমিক ও সমমাত্রিক বৈশিষ্ট্য বিবেচনা করে অপরাপর উৎপাদক নির্ণয় করা হয়।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, a, b, c চলকের

(ক) কোনো চক্র-ক্রমিক বহুপদীর $(a-b)$ একটি উৎপাদক হলে, $(b-c)$ এবং $(c-a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।

(খ) এক মাত্রার ও দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a+b+c)$ ও $k(a^2+b^2+c^2)$ $+m(ab+bc+ca)$ যেখানে k ও m ধ্রুবক।

(গ) দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলকগুলোর সকল মানের জন্য এদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদ দুইটির সহগ পরস্পর সমান হবে।

উদাহরণ ২। $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : প্রথম পদ্ধতি-

$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$=bc(b-c)+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2$

$=bc(b-c)+a^2b-ca^2-ab^2+c^2a$

$=bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)$

$=(b-c)\{bc+a^2-a(b+c)\}$

$=(b-c)\{bc+a^2-ab-ac\}$

$=(b-c)\{bc-ab-ac+a^2\}$

$=(b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে দেখি যে, $P(b)=bc(b-c)+cb(b-b)+b^2(a-b)=0$ সুতরাং, উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তা ধ্রুবক হবে।

অর্থাৎ, $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a)$........(1) সেখানে k একটি ধ্রুবক। a,b,c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য। (1) নং এ $a=0,b=1,c=2$ বসিয়ে পাই, $2(-1)=k(-1)(-1)(2)$

$$\Rightarrow k=-1$$

$\therefore\ bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$

উদাহরণ ৩। $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে পাই, $P(b)=b^3(b-c)+b^3(c-b)+c^3(b-b)=0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(a-b)(b-c)(c-a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্র-ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে। অর্থাৎ, তা $k(a+b+c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.........(1)

a,b,c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য।

সুতরাং (1) নং এ $a=0,b=1,c=2$ বসিয়ে পাই, $2+8(-1)=k(-1)(-1)(2)(3)$ বা $k=-1$

(1) এ $k=-1$ বসিয়ে পাই,

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$

উদাহরণ ৪। $(b+c)(c+a)(a+b)+abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে $-b-c$ বসিয়ে পাই,

$P\{-(b+c)\}=(b+c)(c-b-c)(-b-c+b)+(-b-c)bc=bc(b+c)-bc(b+c)=0$.

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a+b+c)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী এবং এর এক মাত্রার একটি উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অপর উৎপাদক দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী হবে, অর্থাৎ, $k(a^2+b^2+c^2)+m(bc+ca+ab)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক।

$\therefore\ (b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)\{k(a^2+b^2+c^2)+m(bc+ca+ab)\}$........(1)

a,b,c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য।

(1) এ প্রথমে $a=0,b=0,c=1$ এবং পরে $a=1,b=1,c=0$ বসিয়ে যথাক্রমে পাই, $0=k$ এবং $2=2(k\times 2+m)$

$\therefore\ k=0, m=1.$

এখন k ও m এর মান বসিয়ে পাই, $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(bc+ca+ab)$

মন্তব্য : উদাহরণ ২ এর সমাধানের প্রথম পদ্ধতির অনুরূপ পদ্ধতির উদাহরণ ৩ এবং উদাহরণ ৪ এ বর্ণিত রাশি দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে।

একটি বিশেষ বীজগাণিতিক সূত্র : a,b ও c এর সকল মানের জন্য নিম্নে সূত্রটির দুইটি প্রমাণ দেওয়া হলো:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

প্রথম প্রমাণ (সরাসরি সহজ বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে) :

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab\,(a+b+c)\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

দ্বিতীয় প্রমাণ (সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদীর ধারণা ব্যবহার করে) :

$a^3+b^3+c^3-3abc$ রাশিটিকে a চলকের বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে $a=-(b+c)$ বসিয়ে পাই,

$$p\{-(b+c)\} = -(b+c)^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)bc$$
$$= -(b+c)^3 + (b+c)^3 = 0$$

সুতরাং $a+b+c$ বিবেচনাধীন রাশিটির একটি উৎপাদক। যেহেতু $a^3+b^3+c^3-3abc$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী, সুতরাং রাশিটির অপর উৎপাদক $k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক। অতএব, সকল a, b ও c এর জন্য

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\{k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)\}$$

এখানে প্রথমে $a=1, b=0, c=0$ এবং পরে $a=1, b=1, c=0$ বসিয়ে পাই, $k=1$ এবং

$2 = 2(k\times 2+m) \Rightarrow k=1$ এবং $1 = 2+m \Rightarrow m=-1$

$\therefore\ k=1$ এবং $m=-1$.

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

অনুসিদ্ধান্ত ১। $a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

প্রমাণ : যেহেতু, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+c-a)^2\}$$

অনুসিদ্ধান্ত ২। যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3=3abc$.

অনুসিদ্ধান্ত ৩। যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয়, তবে $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$.

উদাহরণ ৫। $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : ধরি $A=a-b, B=b-c$ এবং $C=c-a$. তাহলে,

$$A+B+C = a-b+b-c+c-a = 0$$

সুতরাং, $A^3+B^3+C^3 = 3ABC$

অর্থাৎ, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$.

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

১। (ক) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(খ) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(গ) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

(ঘ) $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$

(ঙ) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

(চ) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$

(ছ) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

(জ) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

২। যদি $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}=\neq 0$ হয়,
তবে দেখাও যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$.

৩। যদি $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$.

মূলদ ভগ্নাংশ (*Rational Fractions*)

একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$ এবং $\dfrac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

উদাহরণ ১। সরল কর : $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{a}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c}{-(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{ab-ca+bc-ab+ca-bc}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=0$$

উদাহরণ ২। সরল কর : $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

সমাধান : প্রথম ভগ্নাংশ $=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}=\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\dfrac{(a+b-c)(b-a+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\dfrac{b-a+c}{a+b+c}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $= \dfrac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b+c-a)} = \dfrac{c+a-b}{a+b+c}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{a+b-c}{a+b+c} + \dfrac{b-a+c}{a+b+c} + \dfrac{c+a-b}{a+b+c}$

$= \dfrac{a+b-c+b-a+c+c+a-b}{a+b+c}$

$= \dfrac{a+b+c}{a+b+c} = 1$

উদাহরণ ৩। সরল কর : $\dfrac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)} + \dfrac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)} + \dfrac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{(ax+1)^2)(y-z)+(ay+1)^2(z-x)+(az+1)^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$..........(1)

(1) এর লব $= (a^2x^2+2ax+1)(y-z)+(a^2y^2+2ay+1)(z-x)+(a^2z^2+2az+1)(x-y)$

$= a^2\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}+2a\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}$

$+\{y-z)+(z-x)+(x-y)\}$

কিন্তু $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$

তদুপরি, $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0$ এবং $(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$

$\therefore$ (1) এর লব $= -a^2(x-y)(y-z)(z-x)$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{-a^2(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = -a^2$

উদাহরণ ৪। সরল কর : $\dfrac{1}{x+a} + \dfrac{2x}{x^2+a^2} + \dfrac{4x^3}{x^4+a^4} + \dfrac{8x^7}{a^8-x^8}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশির তৃতীয় ও চতুর্থ পদের যোগফল $= \dfrac{4x^3}{x^4+a^4} + \dfrac{8x^7}{a^8-x^8} = \dfrac{4x^3}{x^4+a^4}\left(1+\dfrac{2x^4}{a^4-x^4}\right)$

$= \dfrac{4x^3}{x^4+a^4} \times \dfrac{a^4-x^4+2x^4}{a^4-x^4} = \dfrac{4x^3}{x^4+a^4} \times \dfrac{a^4+x^4}{a^4-x^4} = \dfrac{4x^3}{a^4-x^4}$

$\therefore$ দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চুতর্থ পদের যোগফল $= \dfrac{2x}{x^2+a^2} + \dfrac{4x^3}{a^4-x^4} = \dfrac{2x}{x^2+a^2}\left[1+\dfrac{2x^2}{a^2-x^2}\right]$

$= \dfrac{2x}{x^2+a^2} \times \dfrac{a^2-x^2+2x^2}{a^2-x^2} = \dfrac{2x}{x^2+a^2} \times \dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2} = \dfrac{2x}{a^2-x^2}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{2x}{a^2-x^2} = \dfrac{a-x+2x}{a^2-x^2} = \dfrac{a+x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{a-x}$.

কাজ :

সরল কর :

১। $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

২। $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

৩। $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$

৪। $\dfrac{a^3+a^2+1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3+b^2+1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3+c^2+1}{(c-a)(c-b)}$

৫। $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$

আংশিক ভগ্নাংশ (*Partial Fractions*)

যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের বীজগণিতীয় যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়। ধরা যাক, একটি ভগ্নাংশ $\dfrac{3x-8}{x^2-5x+8}$ একে লেখা যায়, $\dfrac{3x-8}{x^2-5x+8}=\dfrac{2(x-3)+(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$

এখানে প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে দুইটি ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। অর্থাৎ, ভগ্নাংশটিকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয়েছে।

যদি $N(x)$ ও $D(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী এবং লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হয়, তাহলে ভগ্নাংশটি **প্রকৃত ভগ্নাংশ** (*Proper Fraction*)। লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রার সমান অথবা তা অপেক্ষা বড় হলে ভগ্নাংশটিকে **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ** *(Improper Fraction)* বলা হয়।

যেমন, $\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

এবং $\dfrac{2x^4}{x+1}$ ও $\dfrac{x^3+3x^2+2}{x+2}$ উভয়ই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

উল্লেখ্য যে, অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা সাধারণ নিয়মে ভাগ করে অথবা লবের পদগুলোকে সুবিধাজনকভাবে পুনর্বিন্যাস করে ভগ্নাংশটিকে একটি বহুপদী (ভাগফল) এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $\dfrac{x^3+3x^2+2}{x+2}=(x^2+x-2)+\dfrac{6}{x+2}$

প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশকে কীভাবে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়, তা নিম্নে বিভিন্ন পদ্ধতিতে দেখানো হলো।

প্রথম পদ্ধতি : যখন হরে বাস্তব ও একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো উৎপাদকই পুনরাবৃত্তি হয় না।

উদাহরণ ১। $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$.......(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)$ দ্বারা গুণ করলে পাই, $5x-7 \cong A(x-2+B(x-1)$...........(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। এখন (2) এর উভয়পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই, $5-7 = A(1-2)+B(1-1)$

বা, $-2=-A,\quad \therefore A=2$

আবার, (2) এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই, $10 - 7 = A(2-2) + B$

বা, $3 = B,\quad \therefore B=3$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই, $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}$; এতেই প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত হলো।

মন্তব্য : প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে।

ডানপক্ষ $=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+3(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=$ বামপক্ষ

উদাহরণ ২। $\dfrac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\dfrac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$.......(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x+5 \equiv A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)........(2)$$

(2) এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(2) এর উভয়পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই, $1+5=A(-1)(-2) \Rightarrow 6=2A \Rightarrow A=3$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই, $2+5=B(1)(-1) \Rightarrow 7=-B$

$$\therefore\ B=-7$$

এবং (2) এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই, $3+5=C(2)(1)$ বা $8=2C$ বা $C=4$

এখন, A, B এবং C এর মান . (1) এ বসিয়ে পাই, $\dfrac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}$

এটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

দ্বিতীয় পদ্ধতি : যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান হয়, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করতে হয়।

উদাহরণ ৩। $\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-2)(x-4)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-2)(x-4)} \equiv 1+\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{\mathrm{B}}{x-4}$........(1)

(1) এর উভয়পক্ষে $(x-2)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$(x-1)(x-5) \equiv (x-2)(x-4)+A(x-4)+B(x-2)$........(2)

(2) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x=2,4$ বসিয়ে পাই, $(2-1)(2-5)=A(2-4)$ বা, $A=\dfrac{3}{2}$

এবং $(4-1)(4-5)=B(4-2)$ বা, $B=\dfrac{-3}{2}$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই, $\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-2)(x-4)}=1+\dfrac{3}{2(x-3)}-\dfrac{3}{2(x-4)}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

উদাহরণ ৪। $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv 1+\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$.......(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (x-1)(x-2)(x-3)+A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$.........(2)

(2) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x=1,2,3$ বসিয়ে পাই,

$1=A(-1)(-2)$ বা, $A=\dfrac{1}{2}$

$8=B(1)(-1)$ বা, $B=-8$

এবং $27=C(2)(1)$ বা, $C=\dfrac{27}{2}$

এখন A,B এবং C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{8}{x-2}+\frac{27}{2(x-3)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

তৃতীয় পদ্ধতি : যখন হরে বাস্তব ও একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং উহাদের মধ্যে কয়েকটি পুনরাবৃত্তি হয়।

উদাহরণ ৫ । $\dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ কে আংশিক ভাগ্নাংশে প্রকাশ কর ।

সমাধান : ধরি $\dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-2}$.............(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)^2(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x = A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2$...........(2)

(2) এর উভয়পক্ষে $x=1, 2$ বসাইয়া পাই, $1=B(1-2)$ বা, $B=-1$

এবং $2=C(2-1)^2$ বা, $2=C \Rightarrow C=2$

আবার, (2) এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0=A+C$ বা, $A=-C=-2$

এখন A, B এবং C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই, $\dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{-1}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ ।

চতুর্থ পদ্ধতি : যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো পুনরাবৃত্তি হয় না ।

উদাহরণ ৬ । $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+4)}$ কে আংশিক ভাগ্নাংশে প্রকাশ কর ।

সমাধান : ধরি, $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$..........(1)

উভয়পক্ষকে $(x-1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $x=A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1)$.........(2)

(2) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1=A(5) \Rightarrow A=\dfrac{1}{5}$

x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A+B=0$......... (৩) এবং $C-B=1$.......... (৪)

(3) নং এ $A=\dfrac{1}{5}$ বসিয়ে পাই, $B=-\dfrac{1}{5}$

(4) নং এ $B=-\dfrac{1}{5}$ বসিয়ে পাই, $C=\dfrac{4}{5}$

এখন, A, B ও C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{\frac{1}{5}}{x-1}+\frac{-\frac{x}{5}+\frac{4}{5}}{x^2-4}=\frac{1}{5(x-1)}-\frac{x-4}{5(x^2+4)}$$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ ।

পঞ্চম পদ্ধতি : যখন হরে বস্তব ও দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং উহাদের মধ্যে কয়েকটির পুনরাবৃত্তি ঘটে ।

উদাহরণ ৭। $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$ কে আংশিক ভাগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2} \equiv \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষে $x^2(x^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 = Ax(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+1) + (Ex+F)x^2$..........(2)

(1) এর x^5, x^4, x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$A+C=0,$

$B+D=0$

$2A+C+E=0$

$2B+D+F=0$

$A=0$

$B=1$

$A+C=0$ তে $A=0$ বসিয়ে পাই, $C=0$

$B+D=0$ তে $B=1$ বসিয়ে পাই, $D=-1$

$2A+C+E=0$ তে $A=0, C=0$ বসিয়ে পাই, $E=0$

আবার, $2\text{B}+D+F=0$ তে $D=-1, B=1$ বসিয়ে পাই, $2-1+F=0 \Rightarrow F=-1$

$\therefore\ A=0, \text{B}=1, C=0, D=-1, E=\ 0, F=-1$

(1) এ A,B,C,D,E,F এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2}+\frac{0-1}{x^2+1}+\frac{0-1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

কাজ :

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

১। $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$ ২। $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$ ৩। $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$

৪। $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$ ৫। $\dfrac{1}{1-x^3}$ ৬। $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$

অনুশীলনী ২

১। নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম?

(ক) a^2+b+c (খ) $xy+yz+zx$ (গ) $x^2-y^2+z^2$ (ঘ) $2a^2-5bc-c^2$

২। (i) যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3=3abc$

(ii) $P(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ রাশিটি চক্রক্রমিক

(iii) $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{x^4-1}$ এর সরল মান $\frac{1}{x-1}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

বহুপদী x^3+px^2-x-7 এর একটি উৎপাদক $x+7$। এই তথ্যের আলোকে নিচের ৩ এবং ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। P এর মান কত ?

(ক) -7 (খ) 7 (গ) $\frac{54}{7}$ (ঘ) 477

৪। বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত ?

(ক) $(x-1)(x-1)$ (খ) $(x+1)(x-2)$ (গ) $(x-1)(x+3)$ (ঘ) $(x+1)(x-1)$

৫। $x^4-5x^3+7x^2-a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-2$ হলে, দেখাও যে, $a=4$

৬। মনে কর, $P(x)=x^n-a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক

(ক) দেখাও যে, $(x-a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x)=(x-a)Q(x)$ হয়।

(খ) n জোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x+a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x)=(x+a)Q(x)$ হয়।

৭। মনে কর, $P(x)=x^n+a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক। n বিজোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x+a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন, $P(x)=(x+a)Q(x)$ হয়।

৮। মনে কর, $P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ যেখানে a,b,c ধ্রুবক এবং $a\neq 0$, দেখাও যে, $(x-r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $(rx-1)$ ও $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

৯। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $x^4+7x^3+17x^2+17x+6$

(ii) $4a^4+12a^3+7a^2-3a-2$

(iii) x^3+2x^2+2x+1

(iv) $x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz$

(v) $(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)$

(vi) $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$

১০। যদি $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc+ca+ab=0$ অথবা, $a=b=c$

১১। যদি $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

১২। সরল কর:

(a) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

(c) $\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

(d) $\frac{1}{(1+x)}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$

১৩। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(a) $\frac{5x+4}{x(x+2)}$ (b) $\frac{x+2}{x^2-7x+12}$ (c) $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$

(d) $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$ (e) $\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

১৪। চলক x এর একটি বহুপদী $P(x)=7x^2-3x+4x^4-a+12x^3$

(ক) বহুপদীর আদর্শরূপটি লেখ এবং একটি তৃতীয় মাত্রার উল্টা বহুপদীর উদাহরণ দাও।

(খ) $P(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক $(x+2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

(গ) যদি $Q(x)=6x^3-x^2-5x+2$ এর ক্ষেত্রে $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ হয়, তবে $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

১৫। x, y, z এর একটি বহুপদী হলো, $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

(ক) দেখাও যে, $F(x,y,z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

(খ) $F(x,y,z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x,y,z)=0$, $x+y+z\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2+y^2+z^2)=(xy+yz+zx)$

(গ) যদি $x = b+c-a$, $y = c+a-b$ এবং $z = a+b-c$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a,b,c) : F(x,y,z) = 1:4$

১৬। চলক x এর চারটি রাশি হলো, $(x+3), (x^2-9), (x^3+27)$ এবং (x^4-81)

(ক) উপরিউক্ত রাশিগুলো হতে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ এবং একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ তৈরি কর।

(খ) $\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$ কে সম্ভাব্য আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে উপস্থাপন কর।

(গ) উপরের প্রথম, দ্বিতীয় এবং চতুর্থ রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশির সমষ্টিকে সরলরূপে প্রকাশ কর।

১৭। $(x+1)^3 y + (y+1)^2$ রাশিটিকে

(ক) x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

(খ) y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুবপদ নির্ণয় কর।

(গ) x ও y চলকের বহুপদীরূপে বিবেচনা করে তার মাত্রা নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়
জ্যামিতি

নিম্নমাধ্যমিক ও মাধ্যমিক পর্যায়ের জ্যামিতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য ও এর বিপরীত উপপাদ্য নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। গণিত শিক্ষায় পীথাগোরাস সংক্রান্ত বিষয়াবলি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। তাই মাধ্যমিক উচ্চতর গণিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের আলোকে অধিকতর আলোচনা আবশ্যক। এ সংক্রান্ত আলোচনার জন্য 'লম্ব অভিক্ষেপ' সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা থাকা দরকার। সে লক্ষে এই পর্যায়ে প্রথম অংশে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সংক্ষিপ্ত আলোচনা, দ্বিতীয় পর্যায়ে লম্ব অভিক্ষেপের ধারণা এবং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত নিয়ে আলোচনা করা হবে। আলোচনার শেষ অংশে পীথাগোরাস এবং এর বিস্তৃতির ধারণার উপর ভিত্তি করে যুক্তিমূলক আলোচনা ও প্রমাণের জন্য কিছু সমস্যা অন্তর্ভুক্ত করা হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- ➢ লম্ব অভিক্ষেপের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ পীথাগোরাসের উপপাদ্যের ওপর ভিত্তি করে প্রদত্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ➢ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ➢ ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ➢ টলেমির উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।

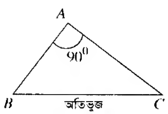
৩ (ক) পীথাগোরাস সম্পর্কিত আলোচনা

খ্রিষ্টের জন্মের প্রায় ৬০০ বছর আগে বিখ্যাত গ্রিক পন্ডিত পীথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (*Theorem*) বর্ণনা করেন। এই উপপাদ্যটি তাঁর নামানুসারে পীথাগোরাসের উপপাদ্য বলে পরিচিত। জানা যায় তারও প্রায় ১০০০ বছর আগে মিশরীয় ভূমি জরিপকারীগণের এই উপপাদ্যটি সম্বন্ধে ধারণা ছিল। পীথাগোরাসের উপপাদ্য বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যায়। নিম্নমাধ্যমিক পর্যায়ে এর দুইটি প্রমাণ দেওয়া আছে। তাই এখানে কোনো প্রমাণ দেওয়া হবে না। শিক্ষার্থীরা এর প্রমাণ অবশ্যই নিম্নমাধ্যমিক জ্যামিতিতে করবে। এখানে শুধুমাত্র এর বর্ণনা ও কিছু আলোচনা থাকবে।

উপপাদ্য ৩.১

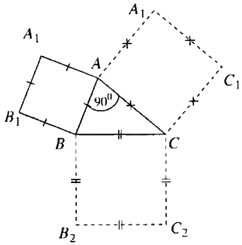
পীথাগোরাসের উপপাদ্য :

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



চিত্র ৩.১ সমকোণী ত্রিভুজ

চিত্র ৩·২ এর ABC ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। $\angle BAC$ সমকোণ এবং BC অতিভুজ। BC অতিভুজের ওপর কোনো বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে এর যে ক্ষেত্রফল হবে সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB ও AC এর ওপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে এদের ক্ষেত্রফলের যোগফল এর সমান হবে।



চিত্র : ৩.২

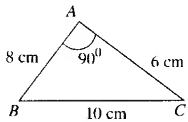
অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

এখানে $BC^2 = BB_2C_2C$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

$AB^2 = AA_1B_1B$ " "

$AC^2 = AA_1C_1C$ " "

উদাহরণস্বরূপ, একটি সমকোণী ত্রিভুজের (চিত্র : ৩.৩) সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৪ সে.মি ও 6 সে.মি. হলে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের মাধ্যমে সহজেই বলা যায় এর অতিভুজের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি হবে।
অনুরূপভাবে, যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য জানা সম্ভব।
নিম্নের উপপাদ্যটি পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা হিসাবে পরিচিত।

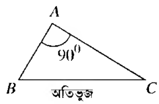


চিত্র : ৩·৩

উপপাদ্য ৩·২

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে। (চিত্র : ৩.৪) লক্ষ কর।

ΔABC এর BC বাহু অতিভুজ এবং অপর দুই বাহু যথাক্রমে AB ও AC.



চিত্র : ৩.৪

BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহু যথাক্রমে AB ও AC বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$
সুতরাং, $\angle BAC$ একটি সমকোণ।

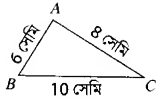
উদাহরণস্বরূপ আমরা বলতে পারি, যদি ΔABC এর AB, BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি 10 সে.মি ও ৪ সে.মি হয়, তাহলে $\angle BAC$ অবশ্যই সমকোণ হবে।
যেহেতু, $AB^2 = 6^2$ ব. সে. মি. $= 36$ ব. সে. মি.

$BC^2 = 10^2$ ব. সে. মি. $=$ 100 ব. সে. মি.

$AC^2 = 8^2$ ব. সে. মি. $=$ 64 ব. সে. মি.

$\therefore\ BC^2 = 100 = 36 + 64 = AB^2 + AC^2.$

$\therefore\ \angle BAC = 90^{\circ} =$ সমকোণ।

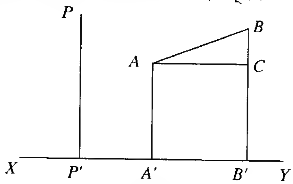


চিত্র ৩.৫

৩ (খ) লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection)

বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ : কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়।

মনে করি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P এর বহিস্থ যেকানো বিন্দু (চিত্র ৩.৬)। P বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব PP' এবং লম্ব PP' এর পাদবিন্দু P'।
সুতরাং, P' বিন্দু XY রেখার ওপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ। অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট রেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। আমরা এ ধারণা থেকে বলতে পারি, কোনো সরলরেখার ওপর লম্ব যেকোন সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। সে ক্ষেত্রে উক্ত লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য হবে শূন্য।



চিত্র : ৩.৬

নির্দিষ্ট রেখা XY এর ওপর কোনো বিন্দু P এবং রেখাংশ AB এর লম্ব অভিক্ষেপ।

রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ :

ধরি, AB রেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয় A ও B (চিত্র : ৩.৬)। এখন A ও B বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AA' ও BB'। AA' লম্বের পাদবিন্দু A' এবং BB' লম্বের পাদবিন্দু B'। এই $A'B'$ রেখাংশই হচ্ছে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। তাই $A'B'$ রেখাংশকে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ (*Orthogonal Projection*) বলা হয়।

লক্ষণীয় :

১। কোনো রেখার ওপর এর বহিস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

২। কোনো রেখার ওপর লম্ব রেখার লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। ফলে লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য শূন্য।

৩। কোনো নির্দিষ্ট রেখার সমান্তরাল রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ ঐ রেখাংশের সমান হবে।

চিত্র ৩.৬ এ AB রেখাংশ XY এর সমান্তরাল হলে $AB = A'B'$ হবে।

কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে এবং লম্ব অভিক্ষেপের ধারণার সাহায্যে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করব।

উপপাদ্য ৩.৩

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও এর ওপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।

BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD (চিত্র : ৩.৭)। প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$

প্রমাণ : BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।

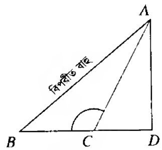
সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$= AD^2 + (BC + CD)^2 \quad [\because BD = BC + CD]$$
$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD.$$

$\therefore AB^2 = (AD^2 + CD^2) + BC^2 + 2BC \cdot CD..........(1)$

আবার ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ।

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2............(2)$



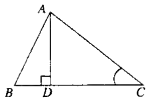
চিত্র : ৩.৭

(2) নং সমীকরণ হতে AC^2 এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$ [প্রমাণিত]

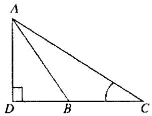
উপপাদ্য ৩.৪

যেকোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও এর উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রে র দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

বিশেষ নির্বচন : ΔABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর দুই বাহু যাথাক্রমে AC ও BC। মনে করি, BC বাহুর উপর (চিত্র: ৩.৮-ক) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর (চিত্র : ৩.৮-খ) লম্ব AD। তাহলে উভয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রে BC বাহুর ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।



চিত্র : ৩·৮ (ক)



চিত্র: ৩·৮ (খ)

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ সমকোণ।

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য] .... (1)

প্রথম চিত্রে $BD = BC - DC$

দ্বিতীয় চিত্রে $BD = DC - BC$

$\therefore$ উভয়ক্ষেত্রে $BD^2 = (BC - DC)^2 = (DC - BC)^2$

$= BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC$

$= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \quad [\because CD = DC]$

$\therefore\ BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD$..........(2)

এখন সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাওয়া যায়

$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD$

বা, $AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ ....(3)

আবার ΔADC সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle D$ সমকোণ

$\therefore\ AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য] .... (4)

সমীকরণ (3) ও (4) হতে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$ [প্রমাণিত]

বি. দ্র. : C বিন্দু থেকে AB এর ওপর লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে একই ভাবে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়।

পীথাগোরাসের উপপাদ্য, লম্ব অভিক্ষেপ এবং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের ওপর ভিত্তি করে বর্ণিত উপপাদ্যসমূহ হতে লক্ষণীয় বিষয় এবং সিদ্ধান্তসমূহ।

লক্ষণীয় :

১। সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বিধায় এদের প্রত্যেকটির লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য। সুতরাং $BC \cdot CD = 0$.

২। উপপাদ্য ৩·৩ ও উপপাদ্য ৩·৪, উপপাদ্য ৩·১ এর ভিত্তির ওপর প্রতিষ্ঠিত। তাই উপপাদ্য ৩·৩ ও উপপাদ্য ৩·৪ কে উপপাদ্য ৩·১ অর্থাৎ পীথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত বলা যায়।

উপরোক্ত আলোচনা সাপেক্ষে গৃহীত সিদ্ধান্তসমূহ :

ΔABC এর ক্ষেত্রে,

১। $\angle C$ স্থূলকোণ হলে,

$AB^2 > AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৩·৩]

২। $\angle C$ সমকোণ হলে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৩·১]

৩। $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে,

$AB^2 < AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৩·৪]

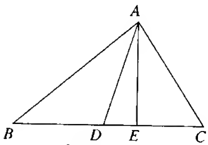
নিম্নোক্ত উপপাদ্যটি পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তার অর্থাৎ উপপাদ্য ৩.৩ ও উপপাদ্য ৩.৪ এর উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত। এই উপপাদ্যটি এ্যাপোলোনিয়াস কর্তৃক বর্ণিত বলে এটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য নামে পরিচিত।

উপপাদ্য ৩·৫ (এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য)

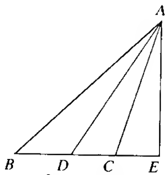
ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$



চিত্র : ৩·৯ (ক)



চিত্র : ৩·৯ (খ)

অঙ্কন : BC বাহুর ওপর (চিত্র : ৩·৯ (ক)) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর (চিত্র ৩·৯ (খ)) AE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE [উভয় চিত্রে]।

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে [উপপাদ্য ৩·৩]

আমরা পাই, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2\,BD \cdot DE$...........(১)

আবার, ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার (চিত্রে ৩.৯ (ক) এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের (চিত্রে ৩.৯ (খ)) উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে (উপপাদ্য ৩.৪) পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD \cdot DE$............(২)

এখন সমীকরণ (১) ও (২) যোগ করে পাই,

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot DE - 2CD \cdot DE$$
$$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DE - 2BD \cdot DE; \quad [\because BD = CD]$$
$$= 2AD^2 + 2BD^2$$
$$= 2(AD^2 + BD^2). \qquad \text{[প্রমাণিত]}$$

সিদ্ধান্ত : এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয় ।

মনে করি, ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c । BC, CA ও AB বাহুর ওপর অঙ্কিত মধ্যমা AD, BE ও CF এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f.

তাহলে, এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই,

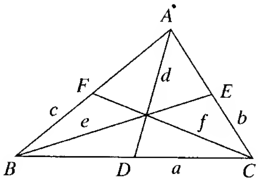
$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left(d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right) \quad \left[\because BD = \frac{1}{2}a\right]$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$



অনুরূপভাবে পাওয়া যায়,

$$e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$$

এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

$\therefore$ কোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে মধ্যমাসমূহের দৈর্ঘ্য জানা যায়।

আবার,

$$d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$
$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$\therefore 3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2).$

সুতরাং বলা যায়, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির তিনগুণ উক্ত ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির চার গুণের সমান।

ত্রিভুজটি সমকোণী অর্থাৎ $\angle C$ = সমকোণ এবং AB অতিভুজ হলে

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$$
বা, $\frac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2) = 2c^2$

বা, $2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2.$

সুতরাং, বলা যায় সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভূজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিণগুণের সমান।

অনুশীলনী ৩.১

১। ΔABC এর $\angle B = 60^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$

২। ΔABC এর $\angle B = 120^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC$

৩। ΔABC এর $\angle B = 90^\circ$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

৪। ΔABC এ AD, BC বাহুর ওপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব । দেখাও যে, $BC \cdot CD = AC \cdot CE$

৫। ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.
[সংকেত : $BP = PQ = QC$; ΔABQ এর মধ্যমা AP.
$AB^2 + AQ^2 = 2 \cdot (BP^2 + AP^2) = 2PQ^2 + 2AP^2$
ΔAPC এর মধ্যমা AQ,
$AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2$]

৬। ΔABC এর $AB = AC$। ভূমি BC এর ওপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP \cdot PC$.
[সংকেত : BC এর উপর AD লম্ব আঁক, তাহলে $AB^2 = BD^2 + AD^2$ এবং $AP^2 = PD^2 + AD^2$]

৭। ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$
[**সংকেত :** এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের আলোকে গৃহীত সিদ্ধান্ত সমূহ দেখতে হবে অর্থাৎ, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার সম্পর্ক দেখতে হবে]

৩ (গ) ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য

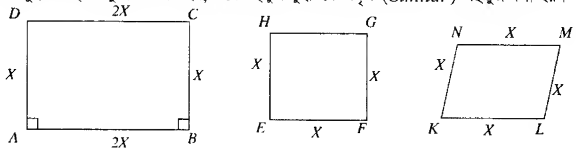
এই অংশে ত্রিভুজ ও বৃত্তবিষয়ক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হবে। উপপাদ্যসমূহ প্রমাণের জন্য দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে পূর্বজ্ঞান থাকা আবশ্যক। মাধ্যমিক জ্যামিতিতে ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এই উপপাদ্যগুলো প্রমাণের পূর্বে শিক্ষর্থীরা ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে জেনে নিবে। শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে সংক্ষেপে আলোচনা করা হলো।

কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বহুভুজ বলা হয়।

বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষ বিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির-

(১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং

(২) অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাত সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (*Similar*) বহুভুজ বলা হয়।



চিত্র ৩.১০

উপরের চিত্রে লক্ষ করলে দেখব যে,

(১) আয়ত $ABCD$ ও বর্গ $EFGH$ সদৃশ নয় যদিও তারা সদৃশকোণী।

(২) বর্গ $EFGH$ ও রম্বস $KLMN$ সদৃশ নয় যদিও তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর যেকোনো ধারাবাহিক মিলকরণের ফলে অনুরূপ বাহু দুইটির অনুপাতগুলো সমান হয়।

দুইটি ত্রিভুজের বেলায় অবশ্য এ রকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে যদি সম্পৃক্ততার সংজ্ঞায় উল্লিখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হয়, তবে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

(১) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে সমান কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু ধরা হয়।

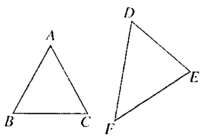
(২) দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমানুপাতিক হলে, আনুপাতিক বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ ধরা হয়।

(৩) উভয়ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলোর শীর্ষবিন্দু মিল করে ত্রিভুজ দুইটি বর্ণনা করা হয়। যেমন, ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ কোণগুলো হচ্ছে $\angle A$ ও $\angle D$, $\angle B$ ও $\angle E$, $\angle C$ ও $\angle F$ এবং অনুরূপ বাহুগুলো হচ্ছে AB ও DE, AC ও DF, BC ও EF.।

দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্যের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হলো।

উপপাদ্য ৩·৬

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।



চিত্র : ৩·১১

পার্শ্বের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী ত্রিভুজ।

অর্থাৎ, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$. হওয়ায়

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ হবে। অর্থাৎ অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

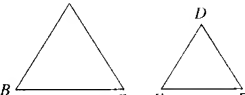
অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তারা সদৃশ হয়।

মন্তব্য : দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই কোণ অপরটির দুই কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং এর ফলে এগুলো সদৃশ হয়। কারণ যেকোনো ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

উপপাদ্য ৩·৭

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হয়।

পার্শ্বের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF এর বাহুগুলো সমানুপাতিক অর্থাৎ, $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}$ হওয়ায় ত্রিভুজদ্বয়ের কোণগুলো পরস্পর সমান। অর্থাৎ, $\angle A=\angle D, \angle B=\angle E$ এবং $\angle C=\angle F$।



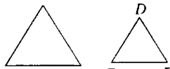
চিত্র ৩·১২

উপপাদ্য ৩.৭ কে উপপাদ্য ৩.৬ এর বিপরীত হিসাবেও বলা যেতে পারে।

উপপাদ্য ৩·৮

দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

নিচের চিত্রের (চিত্র : ৩.১৩) ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A=\angle D$ এবং সমান কোণসংলগ্ন বাহুদ্বয় AB, AC এবং DE ও EF সমানুপাতিক। অর্থাৎ, $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$ হওয়ায় ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।



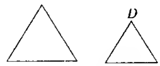
চিত্র : ৩.১৩

উপপাদ্য ৩·৯

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত এদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

নিচের চিত্রের ΔABC ও ΔDEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু BC ও EF। এই অবস্থায় ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত BC ও EF বাহুদ্বয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

অর্থাৎ $\dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF}=\dfrac{BC^2}{EF^2}$।



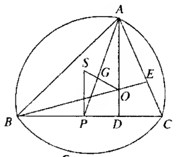
চিত্র : ৩.১৪

ত্রিভুজের ক্ষেত্রে উপরোক্ত আলোচনা ও উপপাদ্যসমূহকে ভিত্তি করে নিম্নোক্ত উপপাদ্যসমূহের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হলো।

উপপাদ্য ৩·১০

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর লম্ব বিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং AP একটি মধ্যমা। লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S এর সংযোগ রেখা AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। S, P যোগ করলে SP রেখা BC এর ওপর লম্ব। তাহলে, G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।



চিত্র ৩.১৫

প্রমাণ : আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ। ΔABC এর লম্ব বিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP।

$\therefore\ OA = 2SP$ .... (1)

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব, সেহেতু $AD \parallel SP$.

এখন $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$

এখন ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore\ \Delta AGO$ এবং ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{OA}{SP}$

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2SP}{SP}$ [(1) নং সমীকরণ হতে]

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2}{1}$

$\therefore\ AG:GP = 2:1$

অর্থাৎ, G বিন্দু AP মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore\ G$ বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র। (প্রমাণিত)

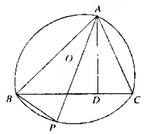
দ্রষ্টব্য : (১) নববিন্দুবৃত্ত (*Nine Point Circle*) : কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদ বিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের ওপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলে।

(২) ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন সসীম সরলরেখার মধ্যবিন্দুই নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র।

(৩) নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।

উপপাদ্য ৩.১১ (ব্রহ্ম গুপ্তের উপপাদ্য)

কোনো ত্রিভুজে যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



চিত্র : ৩.১৬

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং AP পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। ΔABC এর শীর্ষ A থেকে বিপরীত বাহু BC এর ওপর AD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB\cdot AC = AP\cdot AD.$

অঙ্কন : B, P যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ AB এর জন্য $\angle APB$ ও $\angle ACB$ বা $\angle ACD$ বৃত্তাংশস্থিত কোণ। AP বৃত্তের ব্যাস বলে $\angle ABP$ অর্ধঃবৃত্তস্থ কোণ এবং BC বাহুর ওপর AD লম্ব হওয়ায় $\angle ADC$ সমকোণ।

এখন ΔAPB ও ΔADC এর মধ্যে $\angle APB = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান।]

$\angle ABP$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = $\angle ADC.$

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle CAD.$

$\therefore\ \Delta ABP$ ও ΔADC সদৃশকোণী।

$$\therefore\ \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$$

অর্থাৎ, $AB \cdot AC = AP \cdot AD.$ [প্রমাণিত]

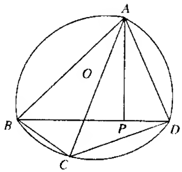
লক্ষণীয় : ΔABC এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে, $R = \frac{1}{2} AP$

অর্থাৎ, $AP = 2R.$

$\therefore$ উপরের উপপাদ্য থেকে পাওয়া যায় $AB \cdot AC = 2R \cdot AD.$

উপপাদ্য ৩.১২ (টলেমির উপপাদ্য)

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



চিত্র : ৩.১৭

বিশেষ নির্বচন : মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD। AC এবং BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$

অঙ্কন : $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ এর ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ আঁকি যেন AP রেখা BD কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে $\angle BAC = \angle DAP$

উভয়পক্ষে $\angle CAP$ যোগ করে পাই,

$\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$

অর্থাৎ, $\angle BAP = \angle CAD$

এখন ΔABP ও ΔACD এর মধ্যে

$\angle ADP = \angle ACD$

$\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$

$\therefore$ ΔABD ও ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{BP}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

অর্থাৎ, $AC \cdot BP = AB \cdot CD$ .... (১)

আবার, ΔABC ও ΔAPD এর মধ্যে

$\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ADP = \angle ACB$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle APD$

$\therefore$ ΔABC ও ΔAPD সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{PD}{BC}$

অর্থাৎ, $AC \cdot PD = BC \cdot AD$ .... (2)

এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

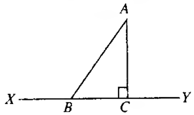
$AC \cdot BP + AC \cdot PD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

বা, $AC(BP + PD) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

অর্থাৎ, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ [যেহেতু $BP + PD = BD$] [প্রমাণিত]

অনুশীলনী ৩·২

১।

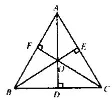


XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?

ক. AB　　খ. BC

গ. AC　　ঘ. XY

২।



ওপরের চিত্রে কোনটি লম্ব বিন্দু?

ক. D　　খ. E

গ. F　　ঘ. O

৩। i ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে।

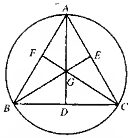
ii ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে 3:1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

iii সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii　　খ. ii ও iii

গ. i ও iii　　ঘ. i, ii ও iii



D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু হলে ওপরের চিত্রের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৪। G বিন্দুর নাম কী?

ক. লম্ব বিন্দু খ. অন্তঃকেন্দ্র

গ. ভরকেন্দ্র ঘ. পরিকেন্দ্র

৫। ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কী?

ক. পরিবৃত্ত খ. অন্তঃবৃত্ত

গ. বহিঃবৃত্ত ঘ. নববিন্দু বৃত্ত

৬। ΔABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

ক. $AB^2 + AC^2 = BC^2$

খ. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

গ. $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$

ঘ. $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

৭। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর ওপর লম্ব। অর্থাৎ $PO \perp AB$.

৮। ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের ওপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD \cdot BD$.

৯। ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF$. [সংকেত : ΔBOF এবং ΔCOE সদৃশ। $\therefore BO : CO = OF : OE$]

১০। AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$

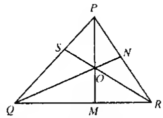
১১। কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $3 \cdot 0$ সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R \cdot AD$. [ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যে $AB = AC$]

১৩। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দতে এবং ΔABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

১৪। ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর ওপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

১৫। ΔPQR -এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

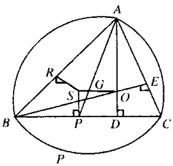


ক. O বিন্দুটির নাম কী? O বিন্দু PM কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

খ. ΔPQR হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2+QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

গ. দেখাও যে, ΔPQR -এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।

১৬।



ওপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC =a, AC = b এবং AB = c

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত।

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে a.CD = b.CE সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

চতুর্থ অধ্যায়
জ্যামিতিক অঙ্কন

কম্পাস ও রুলার ব্যবহার করে নির্দিষ্ট শর্ত অনুযায়ী যে চিত্র অঙ্কন করা হয়, ইহাই জ্যামিতিক অঙ্কন। উপপাদ্য প্রমাণের জন্য যে চিত্র অঙ্কন করা হয় তা যথাযথ (*accurate*) হওয়া খুব জরুরী নয়। সম্পাদ্যের ক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন যথাযথ হওয়া খুবই প্রয়োজন।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

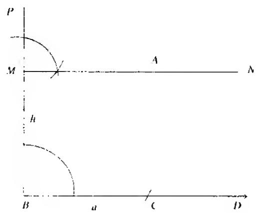
- ➤ প্রদত্ত তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ত্রিভুজ অঙ্কন এবং অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- ➤ প্রদত্ত তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে বৃত্ত অঙ্কন এবং অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।

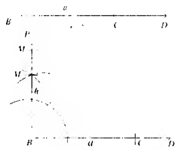
৪·১ ত্রিভুজসংক্রান্ত কতিপয় সম্পাদ্য :

সম্পাদ্য ১

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও উচ্চতা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

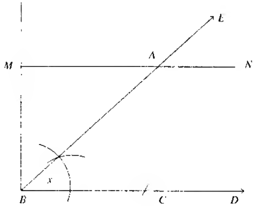
মনে করি, ত্রিভুজের ভূমি a, উচ্চতা h এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।





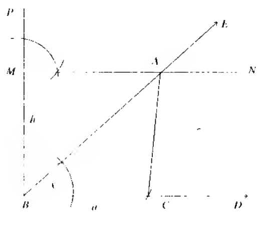
অঙ্কনের বিবরণ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BC = a$ অংশ কেটে নিই।



ধাপ ২ : B বিন্দুতে BC এর ওপর লম্ব BP অঙ্কন করি এবং BP থেকে $BM = h$ অংশ কেটে নিই।

ধাপ ৩ : M বিন্দুতে BC এর সমান্তরাল MN রেখাংশ অঙ্কন করি।



ধাপ ৪ : আবার B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBE$ অঙ্কন করি। BE রেখাংশ MN কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫ : A, C যোগ করি। তাহলে ABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $MN \parallel BC$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore$ ABC এর উচ্চতা $BM = h$

আবার, $BC = a$ এবং $\angle ABC = \angle x$

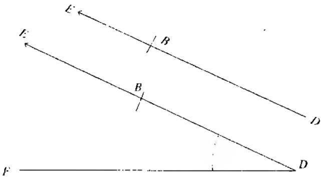
$\therefore$ ΔABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

বিশ্লেষণ : যেহেতু ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন কোণ দেয়া আছে, সুতরাং একটি সরলরেখা থেকে ভূমির সমান অংশ কেটে নিয়ে এর এক প্রান্তে প্রদত্ত কোণের সমান কোণ আঁকতে হবে। অতঃপর ভূমির সঙ্গে নির্দিষ্ট কোণে আনত এমন রেখাস্থ বিন্দু নির্ণয় করতে হবে যেন ভূমি থেকে এর উচ্চতা ত্রিভুজের উচ্চতার সমান হয়।

সম্পাদ্য ২

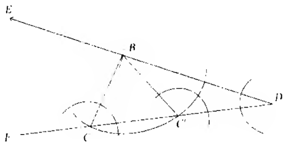
ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি s এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

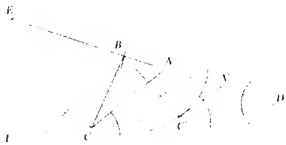


অঙ্কনের বিবরণ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি DE থেকে $DB = s$ অংশ কেটে নিই।



ধাপ ২ : DB রেখার D বিন্দুতে $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle x$ অঙ্কন করি।



ধাপ ৩ : B কে কেন্দ্র করে ভূমি a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যা DF কে C ও C'' বিন্দুতে ছেদ করে। B, C ও B, C'' যোগ করি।

ধাপ ৪ : C বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DCA$ এবং C' বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DC'A'$ অঙ্কন করি। CA ও $C'A'$ রেখাদ্বয় BD কে যথাক্রমে A ও A' বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ও $A'BC'$ ত্রিভুজদ্বয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle ACD = \angle ADC = \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2} + \angle x = \angle x$

$\angle BA'C' = \angle A'DC' + \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

এবং $AC = AD, A'C' = A'D$

ABC ত্রিভুজে $\angle BAC = \angle x, BC = a$ এবং $CA + AB = DA + AB = DB = s$

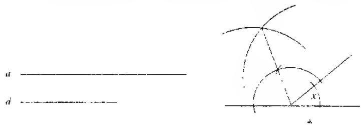
$\therefore$ ΔABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

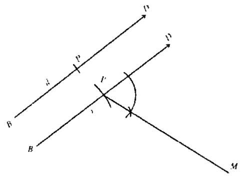
আবার $A'BC'$ ত্রিভুজে $\angle BA'C' = \angle x, BC' = a$ এবং $C'A' + A'B = DA' + A'B = DB = s$

$\Delta A'BC'$ -ই অপর উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ৩

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



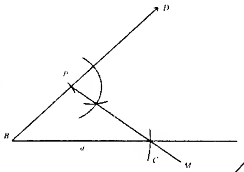


মনে করি, ভূমি a। অপর দুই বাহুর অন্তর d এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

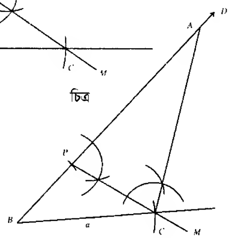
অঙ্কনের বিবরণ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BP = d$ অংশ কেটে নিই।

ধাপ ২ : P বিন্দুতে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ অঙ্কন করি।



চিত্র



ধাপ ৩ : B কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ PM সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৪ : B ও C যোগ করি।

ধাপ ৫ : আবার, C বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ কোণ অঙ্কন করি যেন CA রেখাংশ BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ :

$\angle APC = \angle ACP$; $\therefore AP = AC$

$\therefore \quad AB - AC = AB - AP = BP = d$

আবার $\angle APC = \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেক।

$\therefore \quad \angle APC + \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক

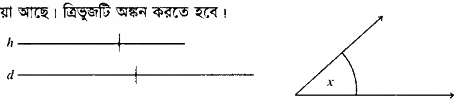
= বহিঃস্থ $\angle CAD = \angle CAB$ এর সম্পূরক।

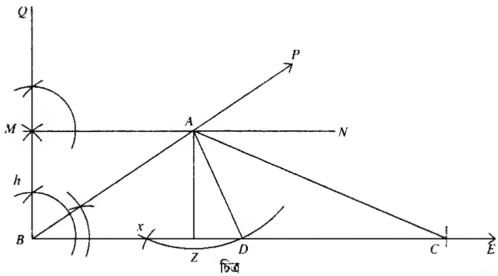
$\therefore \ \angle A = \angle CAB = \angle x$

$\therefore \quad ABC$ -ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ৪

ত্রিভুজের উচ্চতা, ভূমির ওপর মধ্যমা এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।





চিত্র

মনে করি, ত্রিভুজের উচ্চতা h, ভূমির ওপর মধ্যমা d এবং ভূমি সংলগ্ন একটি $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে ।

অঙ্কনের বিবরণ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি BE এর B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle EBP$ অঙ্কন করি।

ধাপ ২ : B বিন্দুতে BE রেখার ওপর BQ লম্ব অঙ্কন করি।

ধাপ ৩ : BQ থেকে ত্রিভুজের উচ্চতা h এর সমান BM অংশ কেটে নিই।

ধাপ ৪ : M বিন্দুতে BE এর সমান্তরাল করে MN রেখা অঙ্কন করি যা BP কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫ : A বিন্দুকে কেন্দ্র করে মধ্যমা d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। ঐ বৃত্তচাপ BE কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৬ : BE থেকে $BD = DC$ অংশ কেটে নিই।

ধাপ ৭ : A, C যোগ করি। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : A, D যোগ করি এবং A থেকে BC এর ওপর AZ লম্ব অঙ্কন করি।

এখানে, MN ও BE সমান্তরাল এবং MB ও AZ উভয়েই BE এর ওপর লম্ব।

$\therefore \ MB = AZ = h =$ উচ্চতা

$BD = DC, \quad \therefore D$ বিন্দুই BC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \ AD = d =$ ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা, অর্থাৎ, BC ভূমি।

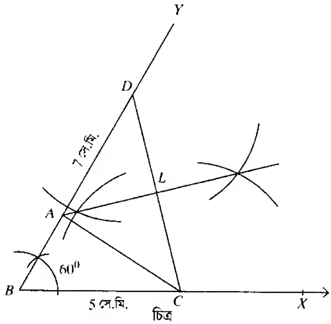
আবার, $\angle ABC = \angle x =$ ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ।

$\therefore \ ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : $\angle x$ এর ওপর নির্ভর করে অনেক ক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যেতে পারে।

উদাহরণ ১। ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণ 60° এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি 7 সে.মি.। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : দেওয়া আছে ভূমি $BC = 5$ সে.মি, অপর দুই বাহুর সমষ্টি $AB + AC = 7$ সে.মি, এবং $\angle ABC = 60^\circ$। ΔABC অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি BX থেকে $BC = 5$ সে.মি. কেটে নিই।

ধাপ ২ : $\angle XBY = 60^\circ$ কোণ আঁকি

ধাপ ৩ : BY রশ্মি থেকে $BD = 7$ সে.মি. কেটে নিই।

ধাপ ৪ : C, D যোগ করি।

ধাপ ৫ : CD রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক আঁকি যা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৬ : A, C যোগ করি, তাহলে ABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

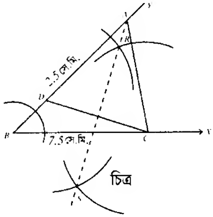
নোট : যেহেতু AL, CD এর লম্ব দ্বিখণ্ডক।

$\therefore \ AD = AC$

তাহলে $BD = BA + AD = BA + AC = 7$ সে.মি. ।

উদাহরণ ২। ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 7.5. সে.মি. ভূমি সংলগ্ন কোণ 45° এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 2.5 সে.মি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : দেওয়া আছে ভূমি $BC = 7.5$ সে.মি., অপর দুই বাহুর অন্তর $AB - AC$ বা $AC - AB = 2.5$ সে.মি. এবং ভূমি সংলগ্ন কোণ 45°। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



চিত্র

(i) $AB - AC = 2.5$ সে.মি এর ক্ষেত্রে অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

১। যেকোনো রশ্মি BX থেকে $BC = 7.5$ সে.মি কেটে নিই ।

২। $\angle YBC = 45^\circ$ অঙ্কন করি।

৩। BY রশ্মি থেকে $BD = 2.5$ সে.মি কেটে নিই।

৪। C, D যোগ করি।

৫। CD এর লম্বদ্বিখণ্ডক RS আঁকি যেন BY কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৬। A, C যোগ করি

তাহলে ABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(ii) $AC - AB = 2.5$ সে.মি. ধরে ত্রিভুজটি নিজে অঙ্কন কর।

কাজ :

১। একটি ত্রিভুজের পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

২। ত্রিভুজের ভূমি $BC = 4.6$ সে.মি. $\angle B = 45^\circ$ এবং $AB + CA = 8.2$ সে.মি দেওয়া আছে। ত্রিভুটি আঁকতে হবে।

৩। সমকোণী ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি, অপর বাহু এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য 5.5 সে.মি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

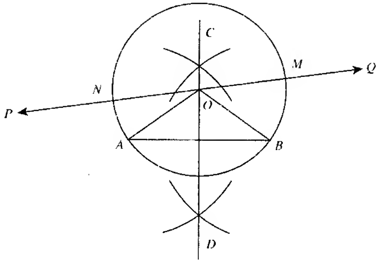
৪। ΔABC এর $BC = 4.5$ সে.মি, $\angle B = 45^\circ$ এবং $AB - AC = 2.5$ সে.মি দেওয়া আছে। ΔABC অঙ্কন করতে হবে।

৫। ΔABC এর পরিসীমা 12 সে.মি. $\angle B = 60^\circ$ এবং $\angle C = 45^\circ$ দেওয়া আছে। ΔABC আঁকতে হবে।

৪·২ বৃত্ত সংক্রান্ত অঙ্কন

সম্পাদ্য ৫

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।



চিত্র

A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র PQ সরলরেখার ওপর অবস্থান করে।

ধাপ ১ : A, B যোগ করি।

ধাপ ২ : AB রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক CD অঙ্কন করি

ধাপ ৩ : CD রেখাংশ PQ রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে

ধাপ ৪ : O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত $ABMN$ বৃত্ত অঙ্কিত হলো, যা নির্ণেয় বৃত্ত।

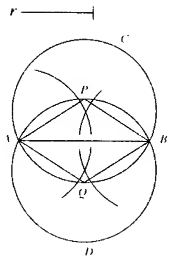
প্রমাণ : CD রেখা AB রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক। সুতরাং CD রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। অঙ্কনানুসারে, O বিন্দুটি CD ও PQ এর ওপর অবস্থিত। আবার, OA ও OB সমান বলে O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি A ও B বিন্দু দিয়ে যাবে এবং বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুটি PQ রেখার ওপর অবস্থান করবে।

$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

সম্পাদ্য ৬

একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ব্যাসার্ধ r এর সমান হয়।



চিত্র

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

১। A ও B যোগ করি।

২। A ও B কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর উভয় পাশে দুইটি করে বৃত্তচাপ আঁকি। এক পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে P বিন্দতে এবং অপর পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। P কে কেন্দ্র করে PA ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC বৃত্ত অঙ্কন করি।

৪। আবার Q কে কেন্দ্র করে QA ব্যাসার্ধ নিয়ে ABD বৃত্ত অঙ্কিত হলো। তাহলে ABC ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : $PA = PB = r$

$\therefore$ P কে কেন্দ্র করে PA বা PB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABC বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ $PA = r$ হয়।

আবার $QA = QB = r$

$\therefore Q$ কে কেন্দ্র করে QA বা QB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABD বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ $QA = r$।

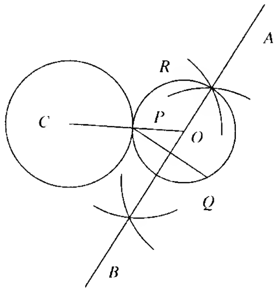
$\therefore$ ABC ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রতিটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য ৭

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

মনে করি, নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C, P ঐ বৃত্তের ওপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং Q ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং Q বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনের ধাপসমূহ :



ধাপ ১ : P, Q যোগ করি।

ধাপ ২ : PQ এর লম্বদ্বিখন্ডক AB আঁকি

ধাপ ৩ : C, P যোগ করি।

ধাপ ৪ : বর্ধিত CP রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫ : 'O' কে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত PQR -ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : O, Q যোগ করি। AB রেখাংশ বা OB রেখাংশ PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ $OP = OQ$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা Q বিন্দু দিয়ে যাবে।

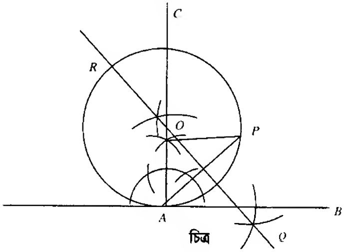
আবার P বিন্দুটি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার ওপর অবস্থিত এবং P বিন্দু উভয় বৃত্তের ওপর অবস্থিত অর্থাৎ P বিন্দুতে বৃত্তদ্বয় মিলিত হয়েছে। সুতরাং বৃত্তদ্বয় P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য ৮

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং রেখার কোনো বিন্দু দিয়ে যায়।

মনে করি, AB সরলরেখাস্থ A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB রেখার বহিঃস্থ P অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা AB কে A বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং P বিন্দু দিয়ে যায়।



চিত্র

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

ধাপ ১ : AB এর উপর A বিন্দুতে AC লম্ব অঙ্কন করি।

ধাপ ২ : P, A যোগ করে তার লম্বদ্বিখণ্ডক QO অঙ্কন করি।

ধাপ ৩ : QO এবং AC রেখাদ্বয় O বিন্দতে ছেদ করে।

ধাপ ৪ : O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি QO রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে APR ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : O, P যোগ করি। AP রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক OQ এর ওপর O বিন্দুটি অবস্থিত।

$\therefore\ OA = OP$

$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত P বিন্দু দিয়ে যায়।

আবার OA ব্যাসার্ধ রেখার A প্রান্ত বিন্দুতে AB এর উপর AO লম্ব।

$\therefore$ AB রেখাংশ বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে।

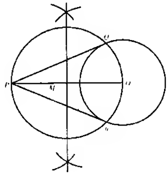
$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

বিশ্লেষণ : যেহেতু বৃত্তটি নির্দিষ্ট রেখাকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, সুতরাং ঐ রেখাটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সঙ্গে সমকোণে থাকবে। সুতরাং নির্দিষ্ট রেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব আঁকতে হবে এবং এই লম্বই বৃত্তের একটি ব্যাস হবে। আবার ঐ রেখাস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু ও বহিঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু উভয়েই বৃত্তের পরিধির ওপরে থাকবে বিধায় এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডক কেন্দ্র দিয়ে যাবে।

তাহলে এই লম্বই দ্বিখণ্ডক ও পূর্বাঙ্কিত ব্যাসের ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হবে।

উদাহরণ ১। 2 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 5 সে.মি. দূরে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : 2 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র 0 এবং নির্দিষ্ট বিন্দু P থেকে O বিন্দুর দূরত্ব 5 সে.মি। P বিন্দু থেকে উক্ত বৃত্তে স্পর্শক অঙ্কন করে এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।



অঙ্কনের ধাপসমূহ :

ধাপ ১ : OP রেখাকে সমদ্বিখন্ডিত করি । ধরি, OP এর দ্বিখণ্ডিত বিন্দু M।

ধাপ ২ : M -কে কেন্দ্র করে OM ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি যা O কেন্দ্রিক বৃত্তের Q এবং R বিন্দতে ছেদ করে।

ধাপ ৩ : P,Q এবং P,R যোগ করি। তাহলে PQ এবং PR -ই নির্ণেয় স্পর্শক।

এখন, PQ ও PR পরিমাপ করে পাই, $PQ = PR = 4\cdot 6$ সে.মি.

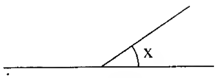
কাজ :

১। 5 সে.মি., 12 সে.মি. ও 13 সে.মি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

২। 6.5 সে.মি., 7 সে.মি. এবং 7.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের বহিঃবৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

অনুশীলনী 8

১।



চিত্র

$x = 60$ হলে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?

ক. 30^0 খ. 60^0

গ. 120^0 ঘ. 180^0

২. i যেকোনো দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

ii শুধুমাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

iii বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক আঁকা যায়।

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৩। কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও এদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৪। কোনো ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৫। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৬। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৭। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৮। ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৯। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

১০। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১২। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১৩। ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

১৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB জ্যা-এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে।

যেন $CP^2 = AP \cdot OB$ হয়।

১৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 5 সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করে ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

গ. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা পূর্বে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু Q দিয়ে যায়।

পঞ্চম অধ্যায়

সমীকরণ

বীজগণিতে অজ্ঞাত বা চলরাশি খুবই গুরুত্বপূর্ণ ইহা পূর্বেও আলোচনা করা হয়েছে। বাস্তব জীবনে অনির্দিষ্ট কোনো বস্তু, সংখ্যা বা বস্তুসমূহকে বোঝানোর জন্য আমরা x, y, z ইত্যাদি প্রতীক ব্যবহার করি। এই রকম প্রতীক বা প্রতীকসমূহকে চলক বা অজ্ঞাত রাশি বলে। একাধিক চলক বা অজ্ঞাত রাশির সমন্বয়ে রাশিমালার সৃষ্টি হয়। যেমন, $2x + y, x^2 + z, x + y + 2z,$ ইত্যাদি। আবার কোনো অজ্ঞাত রাশি বা রাশিমালা যখন নির্দিষ্ট সংখ্যার বা মানের সমান লেখা হয়, তখন একে সমীকরণ বলে। বীজগণিতে সমীকরণ খুবই গুরুত্বপূর্ণ একটি বিষয়। ইহার সাহায্যে অনেক বাস্তব সমস্যা সহজেই সমাধান করা যায়।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- দ্বিঘাত সমীকরণ $(ax^2 + bx + c = 0)$ সমাধান করতে পারবে।
- বর্গমূলবিশিষ্ট সমীকরণ চিহ্নিত করতে পারবে।
- বর্গমূলবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করতে পারবে।
- সূচকীয় সমীকরণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সূচকীয় সমীকরণ সমাধান করতে পারবে।
- দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণের জোট সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যাকে দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণে প্রকাশ করে সমাধান করতে পারবে।
- দুই চলকবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোট সমাধান করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ $(ax^2 + bx + c = 0)$ সমাধান করতে পারবে।

৫·১ এক চলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণ ও এর সমাধান

মাধ্যমিক বীজগণিতে এক চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ এবং দুই চলকের একঘাত সমীকরণ বিষয়ে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। বীজগুলো মূলদ সংখ্যা হলে, এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সহজেই এর সমাধান করা যায়। কিন্তু সব রাশিমালাকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না। সে জন্য যেকোনো প্রকার দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতিটি ব্যবহার করা হয়।

এক চলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$. এখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং a এর মান কখনোই শূন্য হতে পারবে না।

আমরা দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি,

$ax^2 + bx + c = 0$

বা, $a^2x^2 + abx + ac = 0$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

বা, $(ax)^2 + 2(ax)\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac = 0$ বা, $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac$

বা, $\left(ax+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4}$ বা, $ax+\dfrac{b}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$

বা, $ax=-\dfrac{b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ বা, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (i)

অতএব, x এর দুইটি মান পাওয়া গেল এবং মান দুইটি হচ্ছে

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (ii) এবং $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (iii)

উপরের (i) নং সমীকরণে b^2-4ac কে দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বলে কারণ ইহা সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি নির্ণয় করে।

নিশ্চায়কের অবস্থাভেদে দ্বিঘাত সমীকণের মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি

(i) $b^2-4ac>0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।

(ii) $b^2-4ac>0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

(iii) $b^2-4ac=0$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান হবে। এক্ষেত্রে $x=-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b}{2a}$.

(iv) $b^2-4ac<0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে মূলদ্বয় অবাস্তব হবে। এক্ষেত্রে মূলদ্বয় সবসময় দুইটি অনুবন্ধী জটিল বা কাল্পনিক সংখ্যা হয়। এ বিষয়ে উচ্চতর শ্রেণিতে জানতে পারবে।

উদাহরণ ১। $x^2-5x+6=0$ এর সমাধান কর।

সমাধান : $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায় $a=1, b=-5$ এবং $c=6$.

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$=\frac{5\pm1}{2}=\frac{5+1}{2},\frac{5-1}{2}$$

অর্থাৎ $x_1=3, x_2=2$.

উদাহরণ ২। $x^2-6x+9=0$ এর সমাধান কর।

সমাধান : $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায় $a=1, b=-6$ এবং $c=9$.

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4.1.9}}{2.1}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6\pm0}{2}=\frac{6+0}{2};\frac{6-0}{2}$$

অর্থাৎ $x_1=3, x_2=3$.

উদাহরণ ৩। সমাধান কর ঃ $x^2-2x-2=0$

সমাধান : আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাওয়া যায়, $a=1, b=-2, c=-2$.

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.(-2)}}{2.1}=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}$$

বা, $x=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\left(1\pm\sqrt{3}\right)}{2}$

অর্থাৎ $x_1=1+\sqrt{3},\ x_2=1-\sqrt{3}$.

এখানে লক্ষণীয় যে, সাধারণ নিয়মে মূলদ সংখ্যার সাহায্যে x^2-2x-2 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না গেলেও প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান করা সম্ভব হয়েছে।

উদাহরণ ৪। সমাধান কর ঃ $3-4x-x^2=0$

সমাধান : আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাওয়া যায়, $a=-1, b=-4, c=3$.

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.(-1)3}}{2.(-1)}=\frac{4\pm\sqrt{16+12}}{-2}=\frac{4\pm\sqrt{28}}{-2}=\frac{4\pm2\sqrt{7}}{-2}$$

বা, $x=-\left(2\pm\sqrt{7}\right)$

অর্থাৎ $x_1=-2-\sqrt{7},\ x_2=-2+\sqrt{7}$.

কাজ : উপরের (ii) ও (iii) নং সূত্রের সাহায্যে $ax^2+bx+c=0$ হতে x_1 এবং x_2 এর মান নির্ণয় কর যখন $(i)\,b=0, (ii)\,c=0\ \ (iii)\,b=c=0\ \ (iv)\,a=1$ এবং $(v)\,a=1, b=c=2p$

অনুশীলনী ৫.১

সূত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলো সমাধান কর ঃ

১। $2x^2+9x+9=0$ ২। $3-4x-2x^2=0$ ৩। $4x-1-x^2=0$

৪। $2x^2-5x-1=0$ ৫। $3x^2+7x+1=0$ ৬। $2-3x^2+9x=0$

৭। $x^2-8x+16=0$ ৮। $2x^2+7x-1=0$ ৯। $7x-2-3x^2=0$

৫·২। মূল চিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ

আমরা জানি, চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলোর দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সমীকরণে চলকের বর্গমূল সংবলিত রাশি থাকলে একে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ সমাধান করে যে মূলগুলি পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো মূল প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। এ ধরনের মূল অবান্তর (Extraneous) মূল। সুতরাং মূলচিহ্ন সংবলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মূলগুলি প্রদত্ত সমীকরণের মূল কি না তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যে সব মূল উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের মূল। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হলো।

কাজ: $p=\sqrt{\frac{x}{x+16}}$ ধরে $\sqrt{\frac{x}{x+16}}+\sqrt{\frac{x+16}{x}}=\frac{25}{12}$ সমীকরণটির সমাধান করে শুদ্ধি পরীক্ষা কর।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $\sqrt{8x+9}-\sqrt{2x+15}=\sqrt{2x-6}$

সমাধান : $\sqrt{8x+9}-\sqrt{2x+15}=\sqrt{2x-6}$

বা, $\sqrt{2x+15}+\sqrt{2x-6}=\sqrt{8x+9}$

বা, $2x+15+2x-6+2\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6}=8x+9$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6}=2x$

বা, $(2x+15)(2x-6)=4x^2$ [পুনরায় বর্গ করে]

বা, $4x^2+18x-90=4x^2$

বা, $18x=90$

$\therefore x=5$,

শুদ্ধি পরীক্ষা : $x=5$ হলে, বামপক্ষ $=\sqrt{49}-\sqrt{25}=7-5=2$ এবং ডানপক্ষ $=\sqrt{4}=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=5$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}+2=0$

সমাধান : $\sqrt{2x+8}=2\sqrt{x+5}-2$

বা, $2x+8=4(x+5)+4-8\sqrt{x+5}$ [বর্গ করে]

বা, $8\sqrt{x+5}=4x+20+4-2x-8$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $8\sqrt{x+5}=2x+16=2(x+8)$

বা, $4\sqrt{x+5}=x+8$

বা, $16(x+5)=x^2+16x+64$ [বর্গ করে]

বা, $16=x^2$

$\therefore x=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

শুদ্ধি পরীক্ষা : $x=4$ হলে, বামপক্ষ $=\sqrt{16}-2\sqrt{9}+2=4-2\times 3+2=0=$ ডানপক্ষ

$x=-4$ হলে, বামপক্ষ $=\sqrt{-8+8}-2\sqrt{-4+5}+2=0-2\times 1+2=0=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=4,-4$।

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$

সমাধান : $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$

বা, $2x+9+x-4-2\sqrt{(2x+9)(x-4)}=x+1$ [বর্গ করে]

বা, $2\sqrt{2x^2+x-36}=2x+4$

বা, $\sqrt{2x^2+x-36}=x+2$

বা, $2x^2+x-36=x^2+4x+4$ [বর্গ করে]

বা, $x^2-3x-40=0$

বা, $(x-8)(x+5)=0$

$\therefore x=8$ অথবা -5

শুদ্ধি পরীক্ষা : $x=8$ হলে, বামপক্ষ = $5-2=3$ এবং ডানপক্ষ =3

অতএব, $x=8$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$x=-5$ গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা সমীকরণে $x=-5$ বসালে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আসে যা সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=8$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$

সমাধান : $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$

বা, $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2}=-\sqrt{x^2-7x+12}$

বা, $x^2-3x+2-2\sqrt{2}\sqrt{x^2-3x+2}+2=x^2-7x+12$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{2x^2-6x+4}=2x-4$

বা, $2x^2-6x+4=(2x-4)^2=4x^2-16x+16$ [বর্গ করে]

বা, $x^2-5x+6=0$

বা, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ অথবা $x=3$.

শুদ্ধি পরীক্ষা : $x=2$ হলে বামপক্ষ = $\sqrt{2}$ =ডানপক্ষ

$x=3$ হলে, বামপক্ষ = $\sqrt{2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2, 3$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $\sqrt{x^2-6x+15}-\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{10}-\sqrt{8}$

সমাধান : $\sqrt{x^2-6x+15}-\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{10}-\sqrt{8}$

এখন $x^2-6x+13=y$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে

$\sqrt{y+2}-\sqrt{y}=\sqrt{10}-\sqrt{8}$

বা, $\sqrt{y+2}+\sqrt{8}=\sqrt{y}+\sqrt{10}$

বা, $y+2+8+2\sqrt{8y+16}=y+10+2\sqrt{10y}$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{8y+16}=\sqrt{10y}$

বা, $8y+16=10y$ [বর্গ করে]

বা, $2y=16$ বা, $y=8$

বা, $x^2-6x+13=8$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x^2-6x+5=0$ বা, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=1$ অথবা 5.

শুদ্ধি পরীক্ষা : $x=1$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10}-\sqrt{8} =$ ডানপক্ষ

$x=5$ হলে, বামপক্ষ$=\sqrt{10}-\sqrt{8}=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=1, 5$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

সমাধান : $(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 1+x+1-x+3(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\left\{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}\right\}=2$ [ঘন করে]

বা, $2+3(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}}=2$

বা, $3.2^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}}.(1-x)^{\frac{1}{3}}=0$

বা, $(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}=0$

বা, $(1+x)(1-x)=0$ [আবার ঘন করে]

$x=1$ এবং $x=-1$ উভয়ই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\pm 1$

অনুশীলনী ৫.২

সমাধান কর :

১। $\sqrt{x-4}+2=\sqrt{x+12}$

২। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

৩। $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

৪। $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=\sqrt{8x+9}$

৫। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}$

৬। $\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x^2+4x-10}=6$

৭। $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-6x+6}=1$

৮। $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$

৯। $6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}+5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)}=13$

১০। $\sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)}=3$

৫.৩ সূচক সমীকরণ (Indicial Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, একে সূচক সমীকরণ বলে।

$2^x=8, 16^x=4^{x+2}, 2^{x+1}-2^x-8=0$ ইত্যাদি সমীকরণগুলো সূচক সমীকরণ যেখানে x অজ্ঞাত চলক। সূচক সমীকরণ সমাধান করতে সূচকের নিম্নলিখিত ধর্মটি প্রায়ই ব্যবহার করা হয়ঃ

$a>0;\ a\neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = m$ হয়। এ জন্য প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয় :

কাজ: ১। 4096 কে $\frac{1}{2}, 2, 4, 8, 16, 2\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}$ এর সূচকে প্রকাশ কর।

২। 729 কে $3, 9, 27, 16, \sqrt[5]{9}$ এর সূচকে লিখ।

৩। $\frac{64}{729}$ কে $\frac{3}{2}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ এর সূচকে প্রকাশ কর।

উদাহরণ ১। সমাধান কর ঃ $2^{x+7} = 4^{x+2}$

সমাধান ঃ $2^{x+7} = 4^{x+2}$

বা, $2^{x+7} = \left(2^2\right)^{x+2}$

বা, $2^{x+7} = 2^{2x+4}$

$\therefore\ x+7 = 2x+4$

বা, $x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3$.

উদাহরণ ২। সমাধান কর ঃ $3.27^x = 9^{x+4}$

সমাধান ঃ $3.27^x = 9^{x+4}$

বা, $3.\left(3^3\right)^x = \left(3^2\right)^{x+4}$

বা, $3.3^{3x} = 3^{2(x+4)}$

বা, $3^{3x+1} = 3^{2x+8}$

$\therefore\ 3x+1 = 2x+8$

বা, $x = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 7$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর ঃ $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}, \left(a>0, a\neq 3, m\neq 0\right)$

সমাধান ঃ $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$

বা, $\frac{3^{mx-1}}{3} = a^{mx-2}$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3^{mx-2} = a^{mx-2}$

বা, $\left(\frac{a}{3}\right)^{mx-2} = 1 = \left(\frac{a}{3}\right)^0$

বা, $mx-2 = 0$

বা, $mx = 2$

বা, $x = \frac{2}{m}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{2}{m}$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $2^{3x-5}.a^{x-2}=2^{x-3}.2a^{1-x}$, ($a>0$ এবং $a\neq\frac{1}{2}$)

সমাধান : $2^{3x-5}.a^{x-2}=2^{x-3}.2a^{1-x}$

বা, $\frac{a^{x-2}}{a^{1-x}}=\frac{2^{x-3}.2^1}{2^{3x-5}}$ বা, $a^{x-2-1+x}=2^{x-3+1-3x+5}$

বা, $a^{2x-3}=2^{-2x+3}$ বা, $a^{2x-3}=2^{-(2x-3)}$

বা, $a^{2x-3}=\frac{1}{2^{2x-3}}$ বা, $a^{2x-3}.2^{2x-3}=1$

বা, $(2a)^{2x-3}=1=(2a)^0$

$\therefore$ $2x-3=0$ বা, $2x=3$ বা, $x=\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{3}{2}$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর ঃ $a^{-x}\left(a^x+b^{-x}\right)=\frac{a^2b^2+1}{a^2b^2}$, ($a>0, b>0$ এবং $ab\neq 1$)

সমাধান ঃ $a^{-x}\left(a^x+b^{-x}\right)=1+\frac{1}{a^2b^2}$

বা, $a^{-x}.a^x+a^{-x}.b^{-x}=1+\frac{1}{a^2b^2}$

বা, $1+(ab)^{-x}=1+(ab)^{-2}$

বা, $(ab)^{-x}=(ab)^{-2}$

$\therefore$ $-x=-2$

অর্থাৎ, $x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর ঃ $3^{x+5}=3^{x+3}+\frac{8}{3}$

সমাধান ঃ $3^{x+5}=3^{x+3}+\frac{8}{3}$

বা, $3^x.3^5=3^x3^3+\frac{8}{3}$

বা, $3^x.3^6-3^x.3^4=8$ [পক্ষান্তর এবং উভয় পক্ষে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3^x.3^4\left(3^2-1\right)=8$

বা, $3^{x+4}.8=8$

বা, $3^{x+4}=1=3^0$

$\therefore\ x+4=0$ বা, $x=-4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=-4$

উদাহরণ ৭। সমাধান কর ঃ $3^{2x-2}-5.3^{x-2}-66=0$

সমাধান ঃ $3^{2x-2}-5.3^{x-2}-66=0$

বা, $\frac{3^{2x}}{9}-\frac{5}{9}.3^x-66=0$

বা, $3^{2x}-5.3^x-594=0$ [উভয় পক্ষে 9 দ্বারা গুণ করে]

বা, $a^2-5a-594=0$ ($3^x=a$ ধরে)

বা, $a^2-27a+22a-594=0$

বা, $(a-27)(a+22)=0$

এখন $a\neq -22$, কেননা $a=3^x>0$ সুতরাং $a+22\neq 0$

অতএব, $a-27=0$

বা, $3^x=27=3^3$

$\therefore\ x=3$

নির্ণেয় সমাধান $x=3$

উদাহরণ ৮। সমাধান কর ঃ $a^{2x}-(a^3+a)a^{x-1}+a^2=0(a>0,\ a\neq 1)$

সমাধান ঃ $a^{2x}-(a^3+a)a^{x-1}+a^2=0$

বা, $a^{2x}-a(a^2+1)a^x.a^{-1}+a^2=0$

বা, $a^{2x}-(a^2+1)a^x+a^2=0$

বা, $p^2-(a^2+1)p+a^2=0$ ($a^x=p$ ধরে)

বা, $p^2-a^2p-p+a^2=0$

বা, $(p-1)(p-a^2)=0$

$\therefore\ p=1$ অথবা $p=a^2$

বা, $a^x=1=a^0$ বা $a^x=a^2$

$\therefore\ x=0$ $\therefore\ x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=0,\ 2$

অনুশীলনী ৫·৩

সমাধান কর :

১। $3^{x+2}=81$

২। $5^{3x-7}=3^{3x-7}$

৭। $\frac{5^{3x-5}.b^{2x-6}}{5^{x+1}}=a^{2x-6}(a>0,b>0,5b\neq a)$

৮। $4^{x+2}=2^{2x-1}+14$

৩। $2^{x-4} = 4a^{x-6}, (a > 0, a \neq 2)$

৪। $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x+5}$

৫। $(\sqrt[5]{4})^{4x+7} = (\sqrt[11]{64})^{2x+7}$

৬। $\dfrac{3^{3x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5}\ (a > 0)$

৯। $5^x + 5^{2-x} = 26$

১০। $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

১১। $4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

১২। $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

৫·৪ । দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি একঘাত সমীকরণ অথবা একটি একঘাত ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত জোটের সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে এরূপ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত কতিপয় জোটের সমাধান নির্ণয় আলোচনা করা হলো।

উল্লেখ্য যে, চলক দুইটি x ও y হলে $(x, y) = (a, b)$ এরূপ আকারে জোটের একটি সমাধান যদি সমীকরণ দুইটিতে x স্থলে a এবং y স্থলে b বসালে এদের উভয় পক্ষ সমান হয়।

উদাহরণ ১। সমাধান ঃ $x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2},\ y + \dfrac{1}{x} = 3$

সমাধান ঃ $x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2},\ (i)\quad y + \dfrac{1}{x} = 3 \quad (ii)$

(i) থেকে $xy + 1 = \dfrac{3}{2}y \quad (iii)$; (ii) থেকে, $xy + 1 = 3x \quad (iv)$

(iii) ও (iv) থেকে $\dfrac{3}{2}y = 3x$ বা, $y = 2x \quad (v)$

(v) থেকে y এর মান (iv) এ বসিয়ে পাই,

$2x^2 + 1 = 3x$ বা, $2x^2 - 3x + 1 = 0$

বা, $(x-1)(2x-1) = 0$; $\therefore\ x = 1$ অথবা $\dfrac{1}{2}$

(v) থেকে, যখন $x = 1$, তখন $y = 2$ এবং $x = \dfrac{1}{2}$, তখন $y = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1, 2), \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

উদাহরণ ২। সমাধান কর ঃ $x^2 = 3x + 6y,\ xy = 5x + 4y$

সমাধান : $x^2 = 3x + 6y \quad (i) \qquad xy = 5x + 4y \quad (ii)$

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে, $x(x-y) = -2(x-y)$

বা, $x(x-y) + 2(x-y) = 0$

বা, $(x-y)(x+2)=0 \therefore x=y \quad (iii)$

বা, $x=-2 \quad (iv)$

(iii) ও (i) থেকে আমরা পাই, $y^2=9y$ বা, $y(y-9)=0 \therefore y=0$ অথবা 9

(iii) থেকে, যখন $y=0$ তখন $x=0$ এবং যখন $y=9$, তখন $x=9$

আমরা (iv) ও (i) থেকে আমরা পাই, $x=-2$ এবং $4=-6+6y$ বা, $6y=10$ বা, $y=\frac{5}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(0, 0), (9, 9), \left(-2, \frac{5}{3}\right)$

উদাহরণ ৩ । সমাধান কর ঃ $x^2+y^2=61, xy=-30$

সমাধান : $x^2+y^2=61 \quad (i) \quad xy=-30 \quad (ii)$

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) থেকে বিয়োগ করলে আমরা পাই, $(x-y)^2=121 \quad (iii)$

বা, $x-y=\pm 11 \quad$ (iv)

(iii) ও (iv) থেকে,

$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=11 \end{array}\right\} (v), \quad \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=-11 \end{array}\right\} (vi), \quad \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x-y=11 \end{array}\right\} (vii), \quad \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x-y=-11 \end{array}\right\} (viii)$

সমাধান করে পাই,

(v) থেকে, $x=6, y=-5$; (vi) থেকে $x=-5, y=6$

(vii) থেকে, $x=5, y=-6$ (viii) থেকে, $x=-6, y=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(6, -5), (-5, 6), (5, -6), (-6, 5)$

উদাহরণ ৪ । সমাধান কর ঃ $x^2-2xy+8y^2=8, 3xy-2y^2=4$

সমাধান ঃ $x^2-2xy+8y^2=8, (i) 3xy-2y^2=4 \quad (ii)$

(i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই,

$\frac{x^2-2xy+8y^2}{3xy-2y^2}=\frac{2}{1}$ বা, $x^2-2xy+8y^2=6xy-4y^2$

বা, $x^2-8xy+12y^2=0$

বা, $x^2-6xy-2xy+12y^2=0$

বা, $(x-6y)(x-2y)=0 \therefore x=6y \quad (iii)$ অথবা $x=2y \quad (iv)$

(iii) থেকে, x এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3.6y.y-2y^2=4$ বা, $16y^2=4$ বা, $y^2=\frac{1}{4}$ বা, $y=\pm\frac{1}{2}$

(iii) থেকে, $x=6\times\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\pm 3.$

আবার (iv) থেকে x এর মান (ii) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3.2y.y-2y^2=4$ বা, $4y^2=4$ বা, $y^2=1$ বা, $y=\pm1$

(iv) থেকে $x=2\times(\pm1)=\pm2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

উদাহরণ ৫ । সমাধান কর ঃ $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2}, x^2+y^2=90$

সমাধান ঃ $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2}$ (i) $x^2+y^2=90$ (ii)

(i) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{5}{2}$$

বা, $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=\frac{5}{2}$

$\therefore \frac{2\times90}{x^2-y^2}=\frac{5}{2}$ [(ii) থেকে $x^2+y^2=90$ বসিয়ে]

বা, $x^2-y^2=72$ (iii)

(ii)+(iii) নিলে, $2x^2=162$ বা, $x^2=81$ বা, $x=\pm9$

এবং (ii)–(iii) নিলে, $2y^2=18$ বা, $y^2=9$ বা, $y=\pm3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(9,3),(9,-3),(-9,3),(-9,-3)$

কাজ :
উদাহরণ ২ এবং ৩ এর সমাধান বিকল্প পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৫·৪

সমাধান কর ঃ

১। $(2x+3)(y-1)=14,\ (x-3)(y-2)=-1$

২। $(x-2)(y-1)=3,\ (x+2)(2y-5)=15$

৩। $x^2=7x+6y,\ y^2=7y+6x$

৪। $x^2=3x+2y,\ y^2=3y+2x$

৫। $x+\frac{4}{y}=1,\ y+\frac{4}{x}=25$

৬। $y+3=\frac{4}{x},\ x-4=\frac{5}{3y}$

৭। $xy-x^2=1,\ y^2-xy=2$

৮। $x^2-xy=14,\ y^2+xy=60$

৯। $x^2+y^2=25,\ xy=12$

১০। $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3},\ x^2-y^2=3$

১১। $x^2+xy+y^2=3,\ x^2-xy+y^2=7$

১২। $2x^2+3xy+y^2=20,\ 5x^2+4y^2=41$

৫.৫ দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার

সহসমীকরণের ধারনা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনের বহু সমস্যার সমাধান করা যায়। অনেক সময় সমস্যায় দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করতে হয়। সেক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান x এবং y বা অন্য যেকোনো দুইটি স্বতন্ত্র প্রতীক ধরতে হয়। তারপর সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে পরস্পর অনির্ভর, সঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ গঠন করে সমীকরণ জোটের সমাধান করলেই x এবং y অজ্ঞাত রাশিগুলোর মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 650 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 323 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির বাহুর পরিমাণ কত?

সমাধান : মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ x মিটার এবং অপরটির বাহুর পরিমাণ y মিটার।

প্রশ্নমতে, $x^2+y^2=650$ ....(i)

এবং $xy=323$ ....(ii)

$\therefore (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy=650+646=1296$

অর্থাৎ $(x+y)=\pm\sqrt{1296}=\pm 36$

এবং $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy=650-646=4$

অর্থাৎ $(x-y)=\pm 2$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ধনাত্মক, সেহেতু $(x+y)$ এর মান ধনাত্মক হতে হবে।

$\therefore (x+y)=36$....................(iii)

$(x-y)=\pm 2$.........................(iv)

যোগ করে, $2x=36\pm 2$

$\therefore x=\dfrac{36\pm 2}{2}=18\pm 1=19$ বা, 17

সমীকরণ (iii) থেকে পাই, $y=36-x=17$ বা, 19.

$\therefore$ একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 19 মিটার এবং অপর বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 17 মিটার।

উদাহরণ ২। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এর প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 মিটার কম। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য$=x$ মিটার এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ $=y$ মিটার

প্রশ্নমতে, $2y=x+10$ ....(i)

$xy=600$...............(ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $y=\dfrac{10+x}{2}$

সমীকরণ (ii) এ y এর মান বসিয়ে পাই, $\dfrac{x(10+x)}{2}=600$

বা, $\dfrac{10x+x^2}{2}=600$ বা, $x^2+10x=1200$

বা, $x^2+10x-1200=0$ বা, $(x+40)(x-30)=0$

সুতরাং, $(x+40)=0$ অথবা $(x-30)=0$

অর্থাৎ, $x=-40$ বা, $x=30$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না,

$\therefore x=30$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $=30$ মিটার।

উদাহরণ ৩। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় 3. সংখ্যাটির সাথে 18 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক $= x$ এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x+y$

প্রথম শর্তানুসারে, $\dfrac{10x+y}{xy}=3$ বা, $10x+y=3xy$ ....(i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $10x+y+18=10y+x$ বা, $9x-9y+18=0$

বা, $x-y+2=0$ বা, $y=x+2$........................(ii)

সমীকরণ (i) এ $y=x+2$ বসিয়ে পাই, $10x+x+2=3.x(x+2)$

বা, $11x+2=3.x^2+6x$

বা, $3x^2-5x-2=0$ বা, $3x^2-6x+x-2=0$

বা, $3x(x-2)+1(x-2)=0$

বা, $(x-2)(3x+1)=0$

সুতরাং $(x-2)=0$ অথবা $(3x+1)=0$ বা, $3x=-1$

অর্থাৎ, $x=2$ বা, $x=-\dfrac{1}{3}$

কিন্তু সংখ্যার অঙ্ক ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হতে পারে না।

সুতরাং $x=2$ এবং $y=x+2=2+2=4$

$\therefore$ সংখ্যাটি 24

প্রশ্নমালা ৫·৫

১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 481 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 240 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির বাহুর পরিমাণ কত ?

২। দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 250। সংখ্যা দুইটির গুণফল 117, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

৩। একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 মিটার। ইহার বাহুদ্বয়ের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহুদ্বয় দ্বারা অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 28 বর্গমিটার হলে, প্রথম আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৪। দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 181 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 90, সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।

৫। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ অপেক্ষা যথাক্রমে 4 মিটার এবং 1 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার। প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৬। একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 23 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৭। একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৮। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। সংখ্যাটির সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

৯। একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং কর্ণ 20 মিটার। ঐ বাগানের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

১০। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার এবং এর অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৫·৬। দুই চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে এক চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। দুই চলকবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা সম্পর্কে এখানে আলোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $a^{x+2}.a^{2y+1}=a^{10},\quad a^{2x}.a^{y+1}=a^{9}\,(a\neq 1)$

সমাধান : $a^{x+2}:a^{2y+1}=a^{10}\quad (i)\qquad a^{2x}.a^{y+1}=a^{9}\quad (ii)$

(i) থেকে $a^{x+2y+3}=a^{10}$ বা, $x+2y+3=10$ বা, $x+2y-7=0 \quad (iii)$

(ii) থেকে, $a^{2x+y+1}=a^{9}$ বা, $2x+y+1=9$ বা, $2x+y-8=0 \quad (iv)$

(iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-16+7}=\frac{y}{-14+8}=\frac{1}{1-4}$$

বা, $\frac{x}{-9}=\frac{y}{-6}=\frac{1}{-3}$

বা, $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=1$

বা, $x=3,\ y=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(3,2)$

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $3^{3y-1}=9^{x+y},\ 4^{x+3y}=16^{2x+3}$

সমাধান : $3^{3y-1}=9^{x+y}\quad (i)$

বা, $3^{3y-1}=(3^{2})^{x+y}=3^{2x+2y}$

$\therefore\ 3y-1=2x+2y$

বা, $2x-y+1=0$ (iii)

$4^{x+3y}=16^{2x+3}$ (ii)

বা, $4^{x+3y}=\left(4^2\right)^{2x+3}$ বা, $4^{x+3y}=4^{4x+6}$

বা, $x+3y=4x+6$ বা, $3x-3y+6=0$

বা, $x-y+2=0$ (iv)

(iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-2+1}=\frac{y}{1-4}=\frac{1}{-2+1}$$

বা, $\frac{x}{-1}=\frac{y}{-3}=-1$

বা, $x=1,\ y=3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(1,3)$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $x^y=y^x,\ x=2y$

সমাধান : $x^y=y^x$ (i) $x=2y$ (ii) এখানে $x\neq 0,\ y\neq 0$

(ii) থেকে x এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $(2y)^y=y^{2y}$ বা, $2^y.y^y=y^{2y}$

বা, $\frac{y^{2y}}{y^y}=2^y$ বা, $y^y=2^y$ $\therefore y=2$ (ii) থেকে, $x=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(4,2)$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $x^y=y^2,\ y^{2y}=x^4$, যেখানে $x\neq 1$

সমাধান : $x^y=y^2$ (i), $y^{2y}=x^4$ (ii)

(i) থেকে পাই,

$\left(x^y\right)^y=\left(y^2\right)^y$ বা, $x^{y^2}=y^{2y}$ (iii)

(iii) ও (ii) থেকে পাই, $x^{y^2}=x^4$

$\therefore$ $y^2=4$ বা, $y=\pm 2$

এখন $y=2$ হলে (i) থেকে পাই, $x^2=2^2=4$ বা, $x=\pm 2$

আবার, $y=-2$ হলে, (i) থেকে পাই, $(x)^{-2}=(-2)^2=4$

বা, $\frac{1}{x^2}=4$ বা, $x^2=\frac{1}{4}$ বা, $x=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(2,2),(-2,2),\left(\frac{1}{2},-2\right),\left(-\frac{1}{2},-2\right)$

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $8.2^{xy} = 4^y$, $9^x.3^{xy} = \frac{1}{27}$

সমাধান : $8.2^{xy} = 4^y$ (i), $9^x.3^{xy} = \frac{1}{27}$ (ii)

(i) থেকে পাই, $2^3.2^{xy} = (2^2)^y$ বা, $2^{3+xy} = 2^{2y}$ $\therefore\ 3+xy = 2y$ (iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^2)^x.3^{xy} = \frac{1}{3^3}$ বা, $3^{2x+xy} = 3^{-3}$ $\therefore\ 2x+xy = -3$ (iv)

(iii) থেকে (iv) বিয়োগ করে পাই, $3-2x = 2y+3$ বা, $-x = y$ .... (v)

(v) থেকে y এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই, $3 - x^2 = -2x$

বা, $x^2 - 2x - 3 = 0$ বা, $(x+1)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ অথবা $x = 3$

$x = -1$ হলে (v) থেকে পাই, $y = 1$; $x = 3$ হলে (v) থেকে পাই, $y = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (-1, 1), (3, -3)$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $18y^x - y^{2x} = 81, 3^x = y^2$

সমাধান : $18y^x - y^{2x} = 81,$ (i) $3^x = y^2$ (ii)

(i) থেকে পাই, $y^{2x} - 18y^x + 81 = 0$ বা, $(y^x - 9)^2 = 0$

বা, $y^x - 9 = 0$ বা, $y^x = 3^2$ (iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^x)^x = (y^2)^x$ বা, $3^{x^2} = y^{2x}$ (iv)

(iii) থেকে পাই, $(y^x)^2 = (3^2)^2$ বা, $y^{2x} = 3^4$ (v)

(iv) ও (v) থেকে পাই, $3^{x^2} = 3^4$ $\therefore x^2 = 4$ বা, $x = \pm 2$

$x = 2$ হলে (ii) থেকে পাই, $y^2 = 9$ বা, $y = \pm 3$

$x = -2$ হলে (iii) থেকে পাই, $y^{-2} = 9$ বা, $y^2 = \frac{1}{9}$ বা, $y = \pm\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 3), (2, -3), \left(-2, \frac{1}{3}\right), \left(-2, -\frac{1}{3}\right)$

অনুশীলনী–৫·৬

সমাধান কর :

১। $2^x + 3^y = 31$
$2^x - 3^y = -23$

২। $3^x = 9^y$
$5^{x+y+1} = 25^{xy}$

৩। $3^x.9^y = 81$
$2x - y = 8$

৪। $2^x.3^y = 18$
$2^{2x}.3^y = 36$

৫। $a^x.a^{y+1} = a^7$
$a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20}$

৬। $\left.\begin{array}{l} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{array}\right\} y \neq 1$

৭। $y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

৮। $4^x = 2^y$
$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

৯। $8y^x - y^{2x} = 16$
$2^x = y^2$

৫·৭ লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান

দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান আমরা ইতোপূর্বে বীজগণিতীয় পদ্ধতিতে শিখেছি। এখন লেখচিত্রের সাহায্যে ইহার সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।

মনে করি $y = ax^2 + bx + c$. তাহলে x এর যে সকল মানের জন্য $y = 0$ হবে অর্থাৎ লেখচিত্রটি x -অক্ষকে ছেদ করবে, x এর ঐ সকল মানই $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির সমাধান।

উদাহরণ ১। লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 5x + 4 = 0$ এর সমাধান কর।

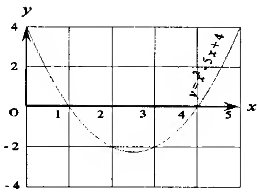
সমাধান : মনে করি, $y = x^2 - 5x + 4$.

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	0	1	2	2.5	3	4	5
y	4	0	−2	−2.25	−2	0	4

উপরের সারণিতে প্রদত্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে লেখচিত্রটি x -অক্ষকে (1, 0) ও (4, 0) বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং, সমীকরণটির সমাধান $x = 1$ বা $x = 4$.



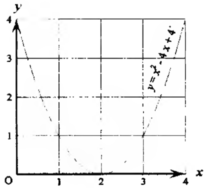
উদাহরণ ২। লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 4x + 4 = 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান : মনে করি, $y = x^2 - 4x + 4$.

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে লেখচিত্রের জন্য কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি ঃ

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
y	4	1	0.25	0	0.25	1	4

উপরের সারণি হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রে দেখা যায় যে ইহা x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে, সেহেতু সমীকরণটির সমাধান হবে $x = 2$, $x = 2$.



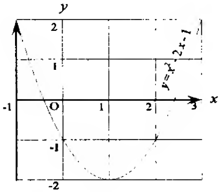
উদাহরণ ৩। লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর : $x^2 - 2x - 1 = 0$

সমাধান : মনে করি, $y = x^2 - 2x - 1$.

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি :

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	2	0.25	-1	-1.75	-2	-1.75	-1	0.25	2

সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে লেখচিত্রটি x-অক্ষকে মোটামুটিভাবে $(-0.4, 0)$ ও $(2.4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং, সমীকরণটির সমাধান $x = -0.4$ (আসন্ন) বা $x = 2.4$ (আসন্ন)।



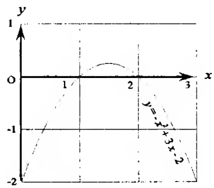
উদাহরণ ৪। $-x^2 + 3x - 2 = 0$ এর মূলদ্বয় লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = -x^2 + 3x - 2$.

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	-2	-0.75	0	0.25	0	-0.75	-2

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে লেখচিত্রটি x – অক্ষের উপর (1, 0) ও (2, 0) বিন্দু দিয়ে গিয়েছে। সুতরাং সমীকরণটির সমাধান $x = 1$ বা $x = 2$.



অনুশীলনী ৫.৭

১। $ax^2 + bx + c = 0$ এবং a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণে b এর মান কোনটি?

ক. 0 খ. 1

গ. -1 ঘ. 3

২। $16^x = 4^{x+1}$ সমীকরণটির সমাধান কোনটি?

ক. 2 খ. 0

গ. 4 ঘ. 1

৩। $x^2 - x + 13 = 0$ হলে সমীকরণটির একটি মূল কোনটি?

ক. $\frac{-1+\sqrt{-51}}{2}$ খ. $\frac{-1-\sqrt{51}}{2}$

গ. $\frac{1+\sqrt{-51}}{2}$ ঘ. $\frac{1+\sqrt{51}}{2}$

৪। $y^x = 9$, $y^2 = 3^x$ হলে সঠিক সমাধান কোনটি?

ক. $(2, 3), (-2, \frac{1}{9})$ খ. $(2, 3), (2, -3)$

গ. $(2, \frac{1}{9}), (-2, 3)$ ঘ. $(-2, -\frac{1}{9}), (2, 3)$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর 11 এবং গুণফল 30।

৫। সংখ্যা দুইটি কী কী ?

ক. 1 এবং 30 খ. 2 এবং 15

গ. 5 এবং 6 ঘ. 5 এবং -6

৬। সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত?

ক. 1 খ. 5

গ. 61 ঘ. $\sqrt{41}$

৭। একটি সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 6। সম্ভাব্য সমীকরণটি গঠন করলে হয়-

i $x + \frac{1}{x} = 6$

ii $x^2 + 1 = 6x$

iii $x^2 - 6x - 1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৮। $2^{px-1} = 2q^{px-2}$ এর সমাধান কোনটি?

ক. $\frac{p}{2}$ খ. p

গ. $-\frac{p}{2}$ ঘ. $\frac{2}{p}$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলির সমাধান কর :

৯। $x^2 - 4x + 3 = 0$ ১০। $x^2 + 2x - 3 = 0$ ১১। $x^2 + 7x = 0$

১২। $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ১৩। $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ১৪। $x^2 + 8x + 16 = 0$

১৫। $x^2 + x - 3 = 0$ ১৬। $x^2 = 8$

১৭। একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 কম। কিন্তু ঐ সংখ্যাটির বর্গের 3 গুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 বেশি।

ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন কর।

খ. সূত্র প্রয়োগ করে ১ম সমীকরণটি সমাধান কর।

গ. ২য় সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

১৮। জনাব আশফাক আলীর জমির ক্ষেত্রফল 0.12 হেক্টর। জমিটির অর্ধপরিসীমা এর একটি কর্ণ অপেক্ষা 20 মিটার বেশি। তিনি তাঁর জমি থেকে শ্যামবাবুর নিকট এক তৃতীয়াংশ বিক্রি করেন। শ্যাম বাবুর জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 5 মিটার বেশি।

ক. উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

খ. আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ. শ্যামবাবুর জমিটির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

অসমতা

সমীকরণ বা সমতা সম্পর্কে আমাদের ধারণা হয়েছে। কিন্তু বাস্তব জীবনে অসমতারও একটা বিস্তৃত ও গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রয়েছে। দৈনন্দিন জীবনে প্রকৃতিতে আমরা যতকিছু দেখি এর কোনোটির ক্ষেত্রেই এক জাতীয় দুইটি বস্তুর বা জীবজন্তুর বা দুইজন মানুষের যেকোনো ধরনের পরিমাপ হুবহু এক পাওয়া যায় না। এমনকি দেখতেও একই রকম হয় না। ফলে আমাদের অসমতার ধারণা প্রয়োজন হয়।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- ➢ এক ও দুই চলকের এক ঘাত বিশিষ্ট অসমতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ দুই চলকবিশিষ্ট সরল অসমতা গঠন ও সমাধান করতে পারবে।
- ➢ বাস্তবভিত্তিক গাণিতিক সমস্যায় অসমতা ব্যবহার করে সমাধান করতে পারবে।
- ➢ এক ও দুই চলকবিশিষ্ট একঘাত অসমতাকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করতে পারবে।

অসমতা

মনে করি একটি ক্লাসের ছাত্রসংখ্যা 200 জন। স্বাভাবিকভাবে দেখা যায় যে, ঐ ক্লাসে সবদিন সকলে উপস্থিত থাকে না। একটি নির্দিষ্ট দিনে উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা x হলে আমরা লিখতে পারি $0 < x \leq 200$। একই ভাবে আমরা দেখি যে, কোনোও একটি অনুষ্ঠানে নিমন্ত্রিত সবাই উপস্থিত হন না। পোশাক-পরিচ্ছদ ও অন্যান্য অনেক ভোগ্যপণ্য তৈরিতে পরিষ্কারভাবে অসমতার ধারণা প্রয়োজন হয়। দালান তৈরির ক্ষেত্রে, পুস্তক মুদ্রণের ক্ষেত্রে এবং এরকম আরও অনেক ক্ষেত্রে উপাদানগুলো সঠিক পরিমাণে নির্ণয় করা যায় না বিধায় প্রথম পর্যায়ে অনুমানের ভিত্তিতে উপাদানগুলো ক্রয় বা সংগ্রহ করতে হয়। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, আমাদের দৈনন্দিন জীবনে অসমতার ধারণাটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

সমীকরণ সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধ বা বিধিসমূহ অসমতার ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। শুধু ব্যতিক্রম হলো অসমান রাশিকে সমান সমান ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক পাল্টে যায়।

$4<6$ অসমতাটি লক্ষ করি।

$\therefore\ 4+2 < 6+2$ বা, $6<8$ [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]

তদ্রূপ $2 < 4$ [উভয়পক্ষ থেকে 2 বিয়োগ করে]

তদ্রূপ $4<12$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

তদ্রূপ $2<3$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

অসমতাটির উভয়পক্ষকে -2 দ্বারা গুণ করলে আলাদাভাবে পাওয়া যায় -8 এবং -12

এখানে $-8>-12$, তেমনি $-2>-3$ [উভয়পক্ষকে -4 দ্বারা ভাগ করে]

সাধারণভাবে বলা যায়, যদি $a<b$ হয়, তবে,

$a+c<b+c$	c এর যেকোনো মানের জন্য
$a-c<b-c$	c এর যেকোনো মানের জন্য
$ac<bc$	c এর ধনাত্মক মানের জন্য
$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$	c এর ধনাত্মক মানের জন্য
কিন্তু $ac>bc$	c এর ঋণাত্মক মানের জন্য
$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$	c এর ঋণাত্মক মানের জন্য

কাজ: ১। তোমাদের শ্রেণির যে সকল ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে বেশি এবং 5 ফুটের চেয়ে কম তাদের উচ্চতা অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

২। কোনো পরীক্ষার মোট নম্বর 1000 হলে, একজন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উদাহরণ ১। সমাধান কর ও সমাধান সেটটি সংখ্যারেখায় দেখাও: $4x+4>16$

সমাধান : দেওয়া আছে, $4x+4>16$

$\therefore 4x+4-4>16-4$ [উভয়পক্ষ থেকে 4 বিয়োগ করে]

বা, $4x>12$

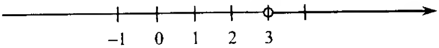
বা, $\frac{4x}{4}>\frac{12}{4}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x>3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x>3$

এখানে সমাধান সেট, $S=\{x\in R: x>3\}$

সমাধান সেটটি নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো। 3 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান এবং সমাধান সেট, $S=\{x\in R: x>3\}$



উদাহরণ ২। সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও : $x-9>3x+1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x-9>3x+1$

$\therefore x-9+9>3x+1+9$

বা, $x>3x+10$

বা, $x-3x>3x+10-3x$

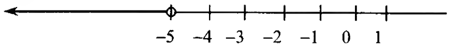
বা, $-2x>10$

বা, $\frac{-2x}{-2}<\frac{10}{-2}$ [উভয়পক্ষকে ঋণাত্মক সংখ্যা -2 দ্বারা ভাগ করায়

বা, $x<-5$ অসমতার দিক পাল্টে গেছে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x < -5$

এখানে সমাধান সেট $S = \{x \in R : x < -5\}$ অর্থাৎ -5 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান।



বি:দ্র: সমীকরণের সমাধান যেমন একটি সমীকরণ (সমতা) দ্বারা প্রকাশ পায়, তেমনি অসমতার সমাধান একটি অসমতা দ্বারা প্রকাশ পায়। অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার অসীম উপসেট।

$a \geq b$ এর অর্থ, $a > b$ অথবা $a = b$

অর্থাৎ শুধু $a < b$ হলেই $a \geq b$ মিথ্যা হয়।

অতএব, $4 > 3$ এবং $4 = 4$ দুইটি উক্তিই সত্য।

উদাহরণ ৩। সমাধান কর ঃ $a(x+b) < c$, $[a \neq 0]$

সমাধান : a ধনাত্মক হলে, $\frac{a(x+b)}{a} < \frac{c}{a}$, উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে পাই,

$x + b < \frac{c}{a}$ বা, $x < \frac{c}{a} - b$

a ঋণাত্মক হলে একই প্রক্রিয়ায় পাই, $\frac{a(x+b)}{a} > \frac{c}{a}$

বা, $x + b > \frac{c}{a}$ বা, $x > \frac{c}{a} - b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(i)\, x < \frac{c}{a} - b$, যদি $a > 0$ হয়,

$(ii)\, x > \frac{c}{a} - b$, যদি $a < 0$ হয়।

বি:দ্র: a যদি শূন্য এবং c যদি ধনাত্মক হয়, তবে x এর যেকোনো মানের জন্য অসমতাটি সত্য হবে। কিন্তু a যদি শূন্য এবং c ঋণাত্মক হয়, তবে অসমতাটির কেনো সমাধান থাকবে না।

প্রশ্নমালা ৬.১

অসমতাগুলো সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও :

১। $y - 3 < 5$ ২। $3(x-2) < 6$ ৩। $3x - 2 > 2x - 1$ ৪। $z \leq \frac{1}{2}z + 3$

৫। $8 \geq 2 - 2x$ ৬। $x \leq \frac{x}{3} + 4$ ৭। $5(3-2t) \leq 3(4-3t)$ ৮। $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > \frac{47}{60}$

অসমতার ব্যবহার

সমীকরণের সাহায্যে তোমরা সমস্যা সমাধান করতে শিখেছ। একই পদ্ধতিতে অসমতা সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

উদাহরণ ১। কোনো পরীক্ষায় বাংলা ১ম ও ২য় পত্রে রমা পেয়েছে যথাক্রমে $5x$ এবং $6x$ নম্বর এবং কুমকুম পেয়েছে যথাক্রম $4x$ এবং 84 নম্বর। কোনো পত্রে কেউ 40 এর নিচে পায়নি। বাংলা বিষয়ে কুমকুম হয়েছে প্রথম এবং রমা হয়েছে দ্বিতীয়। x এর মান সম্ভাব্য অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান : রমা পেয়েছে মোট $(5x+6x)$ নম্বর এবং কুমকুম পেয়েছে $(4x+84)$ মোট নম্বর।

প্রশ্নমতে, $5x+6x<4x+84$

বা, $11x<4x+84$ বা, $7x<84$

বা, $x<\dfrac{84}{7}$ বা, $x<12$

কিন্তু, $4x\geq 40$ [প্রাপ্ত সর্বনিম্ন নম্বর 40] বা, $x\geq 10$

$\therefore$ অসমতার মাধ্যমে লেখা যায় $10\leq x<12$

উদাহরণ ২। একজন ছাত্র 5 টাকা দরে x টি পেন্সিল এবং 8 টাকা দরে $(x+4)$টি খাতা কিনেছে। মোট মূল্য অনুর্ধ্ব 97 টাকা হলে, সর্বাধিক কয়টি পেন্সিল কিনেছে?

সমাধান : x টি পেন্সিলের দাম $5x$ টাকা এবং $(x+4)$টি খাতার দাম $8(x+4)$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $5x+8(x+4)\leq 97$ বা, $5x+8(x+4)\leq 97$

বা, $13x\leq 97-32$ বা, $13x\leq 65$

বা, $x\leq\dfrac{65}{13}$ বা, $x\leq 5$

$\therefore$ ছাত্রটি সর্বাধিক 5টি পেন্সিল কিনেছে।

কাজ : 140 টাকা কেজি দরে ডেভিড x কেজি আপেল কিনলেন। তিনি বিক্রেতাকে 1000 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 50 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা ৬·২

১–৫ পর্যন্ত সমস্যাগুলো অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

১। এক বালক ঘণ্টায় x কি. মি. বেগে-3 ঘণ্টা হাঁটল এবং ঘণ্টায় $(x+2)$ কি. মি. বেগে $\dfrac{1}{2}$ ঘণ্টা দৌড়াল এবং তার অতিক্রান্ত মোট পথ 29 কি. মি. এর কম।

২। একটি বোর্ডিং-এ রোজ $4x$ কেজি চাল এবং $(x-3)$ কেজি ডাল লাগে এবং চাল ও ডাল মিলে 40 কেজির বেশি লাগে না।

৩। 70 টাকা কেজি দরে সোহরাব সাহেব x কেজি আম কিনলেন। বিক্রেতাকে 500 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 20 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন।

৪। একটি গাড়ি 4 ঘণ্টায় যায় x কি. মি. এবং 5 ঘণ্টায় যায় $(x+120)$ কি. মি.। গাড়িটির গড় গতিবেগ ঘণ্টায় 100 কি. মি. এর বেশি নয়।

৫। এক টুকরা কাগজের ক্ষেত্রফল 40 বর্গ সে. মি.। তা থেকে x সে. মি. দীর্ঘ এবং 5 সে. মি. প্রস্থবিশিষ্ট আয়তাকার কাগজ কেটে নেওয়া হলো।

৬। পুত্রের বয়স মায়ের বয়সের এক-তৃতীয়াংশ। পিতা মায়ের চেয়ে 6 বছরের বড়। তিনজনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 90 বছর। পিতার বয়স অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

৭। জেনি 14 বছর বয়সে জুনিয়র বৃত্তি পরীক্ষা দিয়েছিল। 17 বছর বয়সে সে এস.এস.সি পরীক্ষা দেবে। তার বর্তমান বয়স অসমতায় প্রকাশ কর।

৮। একখানি জেট প্লেনের গতি প্রতি সেকেন্ডে সর্বাধিক 300 মিটার। প্লেনটি 15 কি. মি. যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় অসমতায় প্রকাশ কর।

৯। ঢাকা থেকে জেদ্দার বিমানপথে দূরত্ব 5000 কি.মি। জেট বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘণ্টায় 900 কি. মি.। কিন্তু ঢাকা থেকে জেদ্দা যাবার পথে প্রতিকূল দিকে ঘণ্টায় 100 কি. মি. বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হতে হয়। ঢাকা থেকে জেদ্দার বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

১০। পূর্ববর্তী প্রশ্নের সূত্র ধরে, জেদ্দা থেকে ঢাকা ফেরার পথে উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

১১। কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার 5 গুণ, সংখ্যাটির দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট। সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

দুই চলকবিশিষ্ট সরল একঘাত অসমতা

আমরা দুই চলকবিশিষ্ট $y = mx + c$ (যার সাধারণ আকার $ax + by + c = 0$) আকারের সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে শিখেছি (অষ্টম ও নবম-দশম শ্রেণির গণিত) আমরা দেখেছি যে, এ রকম প্রত্যেক লেখচিত্রই একটি সরলরেখা।

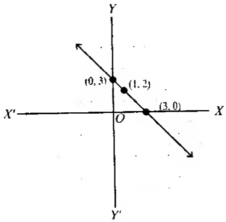
স্থানাঙ্কায়িত x, y সমতলে $ax + by + c = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রের যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ সমীকরণটির বামপক্ষে x ও y এর পরিবর্তে যথাক্রমে ঐ বিন্দুর ভুজ ও কোটি বসালে এর মান শূন্য হয়। অন্যদিকে, লেখচিত্রের বাইরে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না অর্থাৎ ঐ বিন্দুর ভুজ কোটির জন্য $ax + by + c$ এর মান শূন্য অপেক্ষা বড় বা ছোট হয়। সমতলস্থ কোনো বিন্দু P এর ভুজ ও কোটি দ্বারা $ax + by + c$ রাশির x ও y কে যথাক্রমে প্রতিস্থাপন করলে রাশিটির যে মান হয়, একে P বিন্দুতে রাশিটির মান বলা হয় এবং উক্ত মানকে সাধারণত $f(P)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। P বিন্দু লেখস্থিত হলে $f(P) = 0$, P বিন্দু লেখচিত্রের বহিঃস্থ হলে $f(P) > 0$ অথবা $f(P) < 0$

বাস্তবে লেখচিত্রের বহিঃস্থ সকল বিন্দু লেখ দ্বারা দুইটি অর্ধতলে বিভক্ত হয় ঃ একটি অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P)>0$; অপর অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P)<0$.
বলা বাহুল্য, লেখের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P)=0$
উদাহরণ ১। $x+y-3=0$ সমীকরণটি বিবেচনা করি। সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায় ঃ

$$y=3-x$$

x	0	3	1
y	3	0	2

এবং (x,y) সমতলে ছক কাগজে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণটির লেখচিত্রটি নিম্নরূপ হয়:



চিত্র

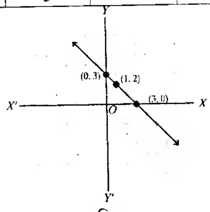
এই লেখচিত্র রেখা সমগ্র তলটিকে তিনটি অংশে পৃথক করে। যথা:

(১) রেখার (ক) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ
(২) রেখার (খ) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ (৩) রেখাস্থিত বিন্দুসমূহ।
এখানে (ক) চিহ্নিত অংশকে লেখরেখার "উপরের অংশ" ও (খ) চিহ্নিত অংশকে লেখরেখার "নিচের অংশ" বলা যায়।

দুই চলকবিশিষ্ট অসমতার লেখচিত্র

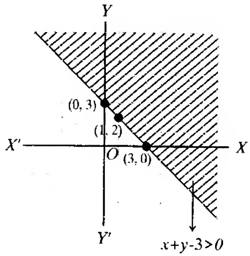
উদাহরণ ২। $x+y-3>0$ অথবা $x+y-3<0$ অসমতার লেখচিত্র অংকন কর।
সমাধান : উপরোক্ত অসমতাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করতে প্রথমেই ছক কাগজে $x+y-3=0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।
$x+y-3=0$ সমীকরণ থেকে পাই

x	0	3	1
y	3	0	2



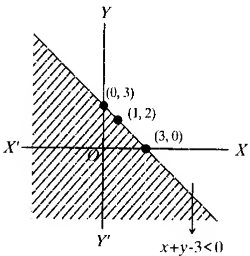
চিত্র

$x + y - 3 > 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে আমরা পাই $-3 > 0$ যা সত্য নয়। কাজেই, অসমতার ছায়াচিত্র হবে $x + y - 3 = 0$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে এর বিপরীত পাশে।



চিত্র

$x + y - 3 < 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাওয়া যায় $-3<0$ যা অসমতাকে সিদ্ধ করে বা মান সত্য। কাজেই, এ অবস্থায় অসমতার ছায়াচিত্র হবে রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে সে পাশে।



চিত্র

উদাহরণ ৩। $2x - 3y + 6 \geq 0$ অসমতার সমাধান সেটের বর্ণনা দাও ও চিত্রিত কর।

সমাধান : আমরা প্রথমে $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

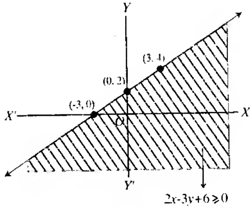
সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায় :

$$2x - 3y + 6 = 0, \text{ বা } y = \frac{2x}{3} + 2$$

এ লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি স্থানাঙ্ক :

x	0	−3	3
y	2	0	4

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘকে একক ধরে (0, 2), (-3, 0), (3, 4) বিন্দুগুলো স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



চিত্র

এখন মূলবিন্দু (0, 0) তে $2x-3y+6$ রাশির মান 6, যা ধনাত্মক। সুতরাং লেখচিত্র রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্যই $2x-3y+6>0$

অতএব, $2x-3y+6>0$ অসমতার সমাধান সেট $2x-3y+6>0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দুর এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমন্বয়ে গঠিত।

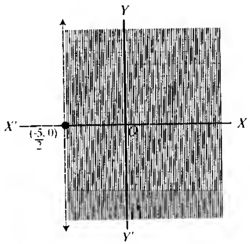
এই সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটিও অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ৪। x, y সমতলে, $-2x<5$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $-2x<5$ অসমতাটিকে এভাবে লেখা যায়।

$$2x+5>0 \quad \text{বা, } 2x>-5 \quad \text{বা, } x>-\frac{5}{2}$$

এখন স্থানাঙ্কায়িত x, y সমতলে $x=-\frac{5}{2}$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ বিন্দু দিয়ে y অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



চিত্র

এই লেখচিত্র রেখার ডান পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত এবং মূলবিন্দুতে $x = 0$ যা, $> -\frac{5}{2}$

সুতরাং লেখচিত্র রেখার ডান পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কই প্রদত্ত অসমতার সমাধান (লেখচিত্র রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়)। সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু (যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটি অন্তর্ভুক্ত নয়)।

উদাহরণ ৫। $y \le 2x$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

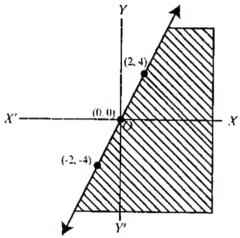
সমাধান : $y \le 2x$ অসমতাটিকে $y - 2x \le 0$ আকারে লেখা যায়।

এখন $y - 2x = 0$ অর্থাৎ $y = 2x$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	2	–2
y	0	4	–4

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



চিত্র

$(1, 0)$ বিন্দু লেখচিত্র রেখার 'নিচের অংশে' আছে। এই বিন্দুতে $y - 2x = 0 - 2\times 1 = -2 < 0$

সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার নিচের অংশ [অর্থাৎ যে অংশে $(1, 0)$ বিন্দুটি অবস্থিত] সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

উদাহরণ ৬। $2x - 3y - 1 \ge 0$ এবং $2x + 3y - 7 \le 0$ অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধান চিহ্নিত কর।

সমাধান : প্রথমে $2x - 3y - 1 = 0 \qquad (i)$

এবং $2x + 3y - 7 = 0 \qquad (ii)$

সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(i) থেকে পাই,

$3y = 2x - 1$ বা, $y = \frac{2x-1}{3}$

এখানে,

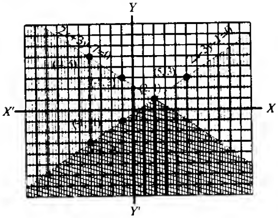
x	5	–4	1
y	3	–3	–1

(ii) থেকে পাই, $3y = -2x + 7$ বা, $y = \frac{-2x+7}{3}$

এখানে,

x	−1	2	−4
y	3	1	5

এখন স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(5, 3), (-4, -3), (-1, -1)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে $2x-3y-1=0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখা এবং $(-1, 3), (2, 1), (-4, 5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে $2x+3y-7=0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।



চিত্র

মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $2x - 3y - 1$ রাশির মান -1, যা ঋণাত্মক। সুতরাং $2x - 3y - 1 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $2x - 3y - 1 < 0$ এবং অপর পাশের সকল বিন্দুর জন্য $2x-3y-1>0$; অতএব লেখচিত্র রেখাটিসহ তার 'নিচে' সমতলের চিহ্নিত অংশ $2x - 3y - 1 > 0$ অসমতার লেখচিত্র। আবার, $(0, 0)$ তে $(2x - 3y - 7)$ রাশির মান -7, যা ঋণাত্মক। সুতরাং $2x + 3y - 7 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $2x + 3y - 7 < 0$, অতএব লেখচিত্র রেখাটিসহ তার 'নিচে' সমতলের চিহ্নিত অংশ $2x + 3y - 7 \leq 0$ অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশ্লিষ্ট অংশসহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই (সীমারেখাসহ) এই লেখচিত্র।

অনুশীলনী ৬·৩

১। $5x + 5 > 25$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?

ক. $S = \{x \in R : x > 4\}$ খ. $S = \{x \in R : x < 4\}$

গ. $S = \{x \in R : x \leq 4\}$ ঘ. $S = \{x \in R : x \geq 4\}$

২। $x + y = -2$ সমীকরণটিতে x এর কোন মানের জন্য $y = 0$ হবে?

ক. 2 খ. 0 গ. 4 ঘ. −2

৩। $2xy + y = 3$ সমীকরণটির সঠিক স্থানাঙ্ক কোনগুলো ?

ক. $(1, -1), (2, -1)$ খ. $(1, 1), (-2, -1)$

গ. $(1, 1), (-2, 1)$ ঘ. $(-1, 1), (2, -1)$

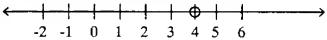
নিম্নে অসমতাটি থেকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

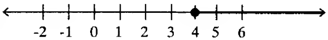
$$x \leq \frac{x}{4} + 3$$

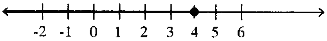
৪। অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?

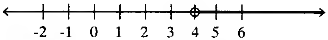
ক. $S = \{x \in R : x > 4\}$ খ. $S = \{x \in R : x < 4\}$
গ. $S = \{x \in R : x \leq 4\}$ ঘ. $S = \{x \in R : x \geq 4\}$

৫। অসমতাটির সমাধান সেটের সংখ্যারেখা কোনটি?

(ক) 

(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

নিম্নের অনুচ্ছেদটি পড়ে ৬ ও ৮ নম্বর প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

একজন ছাত্রী 10.00 টাকা দরে x টি পেন্সিল এবং 6.00 টাকা দরে (x+3)টি খাতা কিনেছে। সবগুলো মিলে মোট মূল্য অনূর্ধ্ব 114.00 টাকা।

৬। সমস্যাটির অসমতায় প্রকাশ কোনটি ?

i $10x + 6(x+3) \leq 114$ ii $10x + 6(x+3) \geq 114$
iii $10x + 6(x+3) < 114$

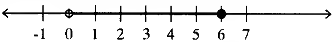
নিচের কোনটি সঠিক ?

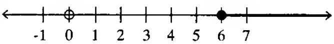
ক. i খ. ii গ. iii ঘ. i ও ii

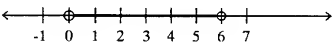
৭। ছাত্রীটি সর্বাধিক কয়টি পেন্সিল কিনল?

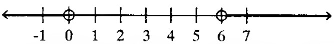
ক. 1 টি খ. 3 টি গ. 5 টি ঘ. 6 টি

৮। সমস্যাটি সংখ্যারেখায় কোনটি প্রযোজ্য হবে?

(ক) 

(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

৯। নিম্নের প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(i) $x - y > -10$ (ii) $2x - y < 6$

(iii) $3x - y \geq 0$ (iv) $3x - 2y \leq 12$

(v) $y < -2$ (vi) $x \geq 4$

(vii) $y > x + 2$ (viii) $y < x + 2$

(ix) $y \geq 2x$ (x) $x + 3y < 0$

১০। নিচের প্রত্যেক অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(i) $x - 3y - 6 < 0$ এবং $3x + y + 2 < 0$

(ii) $x + y - 4 \leq 0$ এবং $2x - y - 3 \geq 0$

(iii) $x - y + 3 > 0$ এবং $2x - y - 6 \geq 0$

(iv) $x + y - 3 > 0$ এবং $2x - y - 5 > 0$

(v) $x + 2y - 4 > 0$ এবং $2x - y - 3 > 0$

(vi) $5x + 2y > 11$ এবং $7x - 2y > 3$

(vii) $3x - 3y > 5$ এবং $x + 3y \leq 9$

(viii) $5x - 3y - 9 > 0$ এবং $3x - 2y \geq 5$

১১। হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান পথের দূরত্ব 1793 কি.মি.। বাংলাদেশ বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ 500 কি.মি./ঘণ্টা। কিন্তু হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর যাবার পথে প্রতিকূলে 60 কি.মি/ঘণ্টা বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হয়।

ক. উদ্দীপকের সমস্যাটির প্রয়োজনীয় সময় t ঘণ্টা ধরে সমস্যাটিকে অসমতায় দেখাও।

খ. হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমানবন্দর পর্যন্ত বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় (ক) অসমতা সমীকরণ থেকে নির্ণয় কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. সিঙ্গাপুর থেকে হযরত শাহজালাল বিমানবন্দরে ফেরার পথে বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময়কে x ধরে সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করে লেখের সাহায্যে সমাধান কর।

১২।দুইটি সংখ্যার ১ম সংখ্যাটির 3 গুণ থেকে ২য় সংখ্যাটির 5 গুণ বিয়োগ করলে 5 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। আবার ১ম সংখ্যা থেকে ২য় সংখ্যার 3 গুণ বিয়োগ করলে অনূর্ধ্ব 9 হয়।

ক. উদ্দীপকের সমস্যাগুলোকে অসমতায় দেখাও।

খ. ১ম সংখ্যাটির 5 গুণ, ইহার দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হলে সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

গ. ক নং এ প্রাপ্ত অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সপ্তম অধ্যায়

অসীম ধারা

Infinite Series

সাধারণ বীজগণিতে অনুক্রম ও সসীম ধারা সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু অনুক্রম ও অসীম ধারার মধ্যে একটা প্রত্যক্ষ সম্পর্ক রয়েছে। অনুক্রমের পদগুলোর সাথে গাণিতিক চিহ্ন ব্যবহার করে অসীম ধারা পাওয়া যায়। এ অধ্যায়ে অসীম ধারা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- অনুক্রমের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অসীম ধারা চিহ্নিত করতে পারবে।
- অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি থাকার শর্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাকে অনন্ত গুণোত্তর ধারায় প্রকাশ এবং সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবে।

অনুক্রম

নিচের সম্পর্কটি লক্ষ করি :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n & \cdots\cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \cdots\cdots & n^2 & \cdots\cdots \end{array}$$

এখানে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n এর বর্গসংখ্যা n^2 এর সাথে সম্পর্কিত। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$ থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে এর বর্গসংখার সেট $\{1, 4, 9, 16, \ldots\ldots\}$ পাওয়া যায়। এই সাজানো বর্গসংখ্যার সেটটি একটি অনুক্রম। সুতরাং, কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি এর পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে এবং $f(n) = n^2$ লেখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ n^2. যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। অনুক্রমটি সাধারণ পদের সাহায্যে লেখার পদ্ধতি হলো $\{n^2\}, n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ বা, $\{n^2\}_{n=1}^{+\infty}$ বা, $\{n^2\}$.

অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। উপরে বর্ণিত $1, 4, 9, 16, \ldots\ldots$ অনুক্রমের প্রথম পদ $= 1$, দ্বিতীয় পদ $= 4$, ইত্যাদি।

নিচে অনুক্রমের চারটি উদাহরণ দেওয়া হলো :

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots\ldots$

$3, 1, -1, -3, \ldots\ldots\ldots, (5-2n), \ldots\ldots$

$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{n}{2n-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n^2+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

কাজ : ১ । নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ পদ নির্ণয় কর :

$(i)\ \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots\ldots \qquad (ii)\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots\ldots$

$(iii)\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots\ldots \qquad (iv)\ 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots\ldots$

২ । প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে নিচের অনুক্রমগুলো লেখ :

$(i)\ 1+(-1)^n \quad (ii)\ 1-(-1)^n \quad (iii)\ 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (iv)\ \frac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}} \quad (v)\ \frac{\ln n}{n} \quad (vi)\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

৩ । তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লেখ ।

ধারা

কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায় । যেমন, $1+4+9+16+\ldots\ldots$ একটি ধারা । আবার $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$ একটি ধারা । এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান । সুতরাং, যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের ওপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য । ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ একটি ধারা হলো গুণোত্তর ধারা । আবার, কোনো ধারার রাশি বা পদের সংখ্যার ওপর নির্ভর করে ধারাকে দুইভাবে ভাগ করা যায় । যথা-

(i) সসীম ধারা (Finite Series), (ii) অসীম ধারা (Infinite Series) .

সসীম ধারাকে সান্ত ধারা এবং অসীম ধারাকে অনন্ত ধারাও বলা হয় ।

সসীম ধারা সম্পর্কে মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তকে আলোচনা করা হয়েছে । এখানে অসীম ধারা সম্পর্কে আলোচনা করা হবে ।

অসীম ধারা (Infinite Series)

বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ হলে $u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম ধারা বলা হয় । এই ধারাটির n তম পদ u_n ।

অসীম ধারার আংশিক সমষ্টি (Partial Sum of Infinite Series)

$u_1+u_2+u_3+u_3+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots$ অনন্ত ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = u_1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = u_1+u_2$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = u_1+u_2+u_3$

....

....

$\therefore$ nতম আংশিক সমষ্টি $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$ অর্থাৎ, কোনো অসীম ধারার nতম আংশিক সমষ্টি হচ্ছে ধারাটির প্রথম n সংখ্যক $(n \in N)$ পদের সমষ্টি।

উদাহরণ ১। প্রদত্ত অসীম ধারা দুইটির আংশিক সমষ্টি নির্ণয় কর।

(ক) $1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots$

(খ) $1-1+1-1+\ldots\ldots\ldots\ldots$

সমাধান : (ক) ধারাটির প্রথম পদ $a=1$ এবং সাধারণ অন্তর $d=1$. অতএব ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

$\therefore$ সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1\}$ $\quad [\because S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}]$

$$= \frac{n}{2}\{2+n-1\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

উপরের উদাহরণে n এর বিভিন্ন মান বসিয়ে পাই,

$$S_{10} = \frac{10\times 11}{2} = 55$$

$$S_{1000} = \frac{1000\times 1001}{2} = 500500$$

$$S_{100000} = \frac{100000\times 100001}{2} = 5000050000$$

....

....

এক্ষেত্রে, n এর মান যত বড় করা হয়, S_n এর মান তত বড় হয়। সুতরাং প্রদত্ত অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

সমাধান : (খ) $1-1+1-1+\ldots\ldots\ldots\ldots$ অসীম ধারাটির

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1-1=0$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1-1+1=1$

৪র্থ আংশিক সমষ্টি $S_4 = 1-1+1+1-1=0$

....

....

উপরের উদাহরণ থেকে দেখা যায় যে, n বিজোড় সংখ্যা হলে nতম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1$ এবং n জোড় সংখ্যা হলে nতম আংশিক সমষ্টি, $S_n = 0$.

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত ধারাটির ক্ষেত্রে, এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যায় না যাকে ধারাটির সমষ্টি বলা হয়।

অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি (Sum of Infinite Series in Geometric Progression)

$a+ar+ar^2+ar^3+............$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

সুতরাং, ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1}$, যেখানে $n \in N$ এবং $r \neq 1$ হলে ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি

$$S_n = a+ar+ar^2+ar^3+...........+ar^{n-1}$$

$$= a \cdot \frac{r^n-1}{r-1}, \text{ যখন } r>1$$

এবং $S_n = a \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r}$, যখন $r<1$

লক্ষ করি :

(i) $|r|<1$ হলে, অর্থাৎ, $-1<r<1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে ($n \to \infty$ হলে) $|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n এর মান যথেষ্ট বড় করলে $|r^n|$ এর মান 0 এর কাছাকাছি হয়। অর্থাৎ r^n এর প্রান্তীয় মান (Limiting Value) 0 হয়। ফলে S_n এর প্রান্তীয় মান,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r}$$

এক্ষেত্রে, $a+ar+ar^2+.......$ অসীম ধারাটির সমষ্টি $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

(ii) $|r|>1$ হলে, অর্থাৎ, $r>1$ অথবা $r<-1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান বৃদ্ধি পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মান যথেষ্ট বড় করা যায়। সুতরাং এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা S পাওয়া যায় না, যাকে S_n এর প্রান্তীয় মান ধরা যায়।

অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

(iii) $r=-1$ হলে, S_n এর প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না।

কেননা, n জোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = 1$ এবং n বিজোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = -1$

এক্ষেত্রে ধারাটি হবে, $a-a+a-a+a-a+......$

সুতরাং, এই অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

$\lvert r\rvert<1$ অর্থাৎ, $-1<r<1$ হলে, $a+ar+ar^2+......$ অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি $S = \dfrac{a}{1-r}$.
r এর অন্য সকল মানের জন্য অসীম ধারাটির সমষ্টি থাকবে না।

মন্তব্য : অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টিকে (যদি থাকে) S_∞ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং একে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বলা হয়।

অর্থাৎ, $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$ গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$, যখন $|r|<1$

কাজ : ১। নিচের প্রত্যেক ক্ষেত্রে একটি অসীম গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r দেওয়া আছে। ধারাটি লেখ এবং যদি এর অসীমতক সমষ্টি থাকে তা-ও নির্ণয় কর :

(i) $a=4,\ r=\dfrac{1}{2}$ (ii) $a=2,\ r=-\dfrac{1}{3}$ (iii) $a=\dfrac{1}{3},\ r=3$

(iv) $a=5,\ r=\dfrac{1}{10^2}$. (v) $a=1,\ r=-\dfrac{2}{7}$ (vi) $a=81,\ r=-\dfrac{1}{3}$.

২। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অসীম গুণোত্তর ধারা লেখ।

উদাহরণ ২। নিচের অসীম গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর।

(১) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^4}+\ldots\ldots\ldots$

(২) $1+0\cdot1+0\cdot01+0\cdot001\ldots\ldots\ldots\ldots$

(৩) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots$

সমাধান (১) : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a=\dfrac{1}{3}$ এবং সাধারণ অনুপাত $r=\dfrac{1}{3^2}\times\dfrac{3}{1}=\dfrac{1}{3}<1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

সমাধান (২) : এখানে, প্রথম পদ $a=1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r=\dfrac{0\cdot1}{1}=\dfrac{1}{10}<1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{10}{9}=1\dfrac{1}{9}$

সমাধান (৩) : এখানে, প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=3.414$ (আসন্ন)

পৌণঃপুনিক দশমিকের সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর

উদাহরণ ৩। (ক) : $0\cdot\dot{5} = 0\cdot 555...........$

$= 0\cdot 5 + 0\cdot 05 + 0\cdot 005 + ...$

ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = 0\cdot 5$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{0\cdot 05}{0\cdot 5} = 0.1$

$\therefore 0\cdot\dot{5} = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{0\cdot 5}{1-(0\cdot 1)} = \dfrac{0\cdot 5}{0\cdot 9} = \dfrac{5}{9}$

(খ) $\cdot\dot{1}\dot{2} = \cdot 12121212...........$

$= \cdot 12 + \cdot 0012 + \cdot 000012 + ...$

এই অসীম গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ $a = \cdot 12$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{\cdot 0012}{\cdot 12} = \cdot 01$

$\therefore \cdot\dot{1}\dot{2} = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\cdot 12}{1-(\cdot 1)} = \dfrac{\cdot 12}{\cdot 99} = \dfrac{4}{33}$

(গ) $1\cdot\dot{2}3\dot{1} = 1\cdot 231231231...........$

$= 1 + (\cdot 231 + \cdot 000231 + \cdot 000000231 + ...)$

এখানে, বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা

যার ১ম পদ $a = \cdot 231$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{\cdot 000231}{\cdot 231} = \cdot 001$

$\therefore 1\cdot\dot{2}3\dot{1} = 1 + \dfrac{a}{1-r}$

$= 1 + \dfrac{\cdot 231}{1-(\cdot 001)} = 1 + \dfrac{231}{999} = \dfrac{410}{333}.$

অনুশীলনী ৭

১. 1, 3, 5, 7, ধারাটির 12 তম পদ কোনটি ?

ক. 12 খ. 13

গ. 23 ঘ. 25

২. কোনো অনুক্রমের n তম পদ = $\dfrac{1}{n(n+1)}$, এর ৩য় পদ কোনটি ?

ক. $\dfrac{1}{3}$ খ. $\dfrac{1}{6}$

গ. $\dfrac{1}{12}$ ঘ. $\dfrac{1}{20}$

৩. কোনো অনুক্রমের n তম পদ = $\dfrac{1-(-1)^n}{2}$ হলে 20 তম পদ কোনটি ?

ক. 0 খ. 1

গ. -1 ঘ. 2

৪ কোনো অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান হবে-

i $n < 10^3$

ii $n < 10^4$

iii $n > 10^4$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

পাশের ধারাটি লক্ষ কর এবং (৫-৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও: $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

৫. ধারাটির 10 তম পদ কোনটি ?

ক. $\frac{4}{3^{10}}$ খ. $\frac{4}{3^{9}}$

গ. $\frac{4}{3^{11}}$ ঘ. $\frac{4}{3^{12}}$

৬. ধারাটির প্রথম 5 পদের সমষ্টি কত?

ক. $\frac{160}{27}$ খ. $\frac{484}{81}$

গ. $\frac{12}{9}$ ঘ. $\frac{20}{9}$

৭. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক. 0 খ. 5

গ. 6 ঘ. 7

৮। প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ, 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর :

(ক) 2, 4, 6, 8, 10, 12,..............

(খ) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

(গ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}, \; n \in N$

(ঘ) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ঙ) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

(চ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

৯। একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \frac{1}{n}$

(ক) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে ?

(খ) $u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে ?

(গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেচ্ছ বড় হলে) সম্পর্কে কী বলা যায় ?

১০। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, $r \neq 1$ হলে, গুণোত্তর ধারা

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ এর n তম আংশিক সমষ্টি, $S_n = a \cdot \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

১১। প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর :

(ক) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(খ) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5^2} + \dfrac{4}{5^3} - \dfrac{8}{5^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(গ) $8 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ঘ) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ঙ) $\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{8} + \left(-\dfrac{1}{16}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

১২।নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। এগুলোর অসীমতক সমষ্টি আছে কি? না থাকলে ব্যাখ্যা দাও।

(ক) $7 + 77 + 777 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(খ) $5 + 55 + 555 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

১৩। x-এর ওপর কী শর্ত আরোপ করলে $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪। প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(ক) $\cdot\dot{2}\dot{7}$ (খ) $2\cdot\dot{3}0\dot{5}$ (গ) $\cdot 0\dot{1}2\dot{3}$ (ঘ) $3\cdot 0\dot{4}0\dot{3}$

১৫। একটি অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 15 তম পদ এবং ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে Un এর প্রান্তীয় মান সম্পর্কে কী বলা যায়?

১৬।নিম্নের ধারাটি লক্ষ কর :

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ক. $x = 1$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

খ. ক নং এ প্রাপ্ত ধারাটির 10তম পদ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. প্রদত্ত ধারাটি x এর ওপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

অষ্টম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি

ত্রিকোণমিতি শব্দটি বিশ্লেষণ করলে পাওয়া যায় 'ত্রিকোণ' এবং 'মিতি'। ত্রিকোণ বলতে তিনটি কোণ এবং মিতি বলতে পরিমাপ বোঝায়। ইংরেজিতে ত্রিকোণমিতিকে '*Trigonometry*' লেখা হয়। এটি বিশ্লেষণেও পাওয়া যায় '*Trigon*' এবং '*Metry*'। '*Trigon*' গ্রিক শব্দ দ্বারা তিনটি কোণ যা ত্রিভুজ এবং '*Metry*' দ্বারা পরিমাপ বোঝায়।

সাধারণভাবে ত্রিকোণমিতি বলতে তিনটি কোণের পরিমাপ বোঝায়। ব্যবহারিক প্রয়োজনে ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ এবং এদের সাথে সম্পর্কিত বিষয়ের আলোচনা থেকেই ত্রিকোণমিতির সূত্রপাত হয়। যেমন, একটি গাছের ছায়ার সাহায্যে গাছটির উচ্চতা, নদীর একপারে দাঁড়িয়ে নদীর বিস্তার নির্ণয়, কোণাকার জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় ইত্যাদি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যবহার অতিপ্রাচীন ও জনপ্রিয়। এ ছাড়া, গণিতের বা বিজ্ঞানের প্রতিটি শাখায় ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার রয়েছে। তাই ত্রিকোণমিতির আলোচনা গণিতের একটি অতীব গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হিসেবে সুপ্রতিষ্ঠিত। ত্রিকোণমিতির আলোচনা দুইটি শাখায় বিভক্ত। একটি সমতলীয় ত্রিকোণমিতি (*Plane Trigonometry*) এবং অন্যটি গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (*Spherical Trigonometry*)। বর্তমান আলোচনা শুধুমাত্র সমতলীয় ত্রিকোণমিতির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

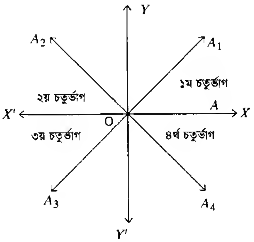
- রেডিয়ান পরিমাপের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রেডিয়ান পরিমাপ ও ডিগ্রি পরিমাপের পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- চারটি চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন নির্দেশ করতে পারবে।
- অনূর্ধ্ব 2π কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবে।
- $-\theta$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবে।
- পূর্ণসংখ্যা $n(n \leq 4)$ এর জন্য $\left(\dfrac{n\pi}{2} \pm \theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সহজ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান করতে পারবে।

৮·১ জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ

জ্যামিতিক কোণ এবং ত্রিকোণমিতিক কোণের আলোচনার সুবিধার্থে আমরা XY সমতলে পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া সরলরেখা XOX' এবং YOY' অঙ্কন করি। রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করায় (চিত্র ৮.১) যে চারটি সমকোণ উৎপন্ন হয়েছে এদের প্রত্যেকটির অভ্যন্তরকে একটি চতুর্ভাগ (*Quadrant*) বলা হয়।

OX রেখা থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরতে থাকলে প্রথম সমকোণের ($\angle XOY$ এক সমকোণ) অভ্যন্তরকে প্রথম চতুর্ভাগ (*First quadrant*) এবং একইভাবে ঘুরতে থাকলে দ্বিতীয় ($\angle YOX'$), তৃতীয় ($X'OY'$) এবং চতুর্থ ($Y'OX$) সমকোণের অভ্যন্তরসমূহকে যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলা হয় (চিত্র ৮.১)।

জ্যামিতিক ধারণা অনুসারে দুইটি ভিন্ন রশ্মি একটি বিন্দুতে মিলিত হলে ঐ বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে বলে ধরা হয়। কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে একটি স্থির রশ্মির সাপেক্ষে অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মির বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন কোণ বিবেচনা করা হয়।



চিত্র : ৮.১

মনে করি, OA একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি এবং এটি শুরুতে OX স্থির রশ্মির অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তার বিপরীত (*Anticlockwise*) দিকে ঘুরছে। OA রশ্মি প্রথমে OA_1 অবস্থানে এসে XOA_1 সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং প্রথম চতুর্ভাগে থাকে এবং পরে যখন OX এর সাথে লম্বভাবে OY অবস্থানে আসে তখন XOY কোণের পরিমাপ $90°$ বা এক সমকোণ হয়। OA রশ্মিটি একই দিকে আরও কিছু ঘুরে যখন OA_2 অবস্থানে আসে তখন XOA_2 কোণটি স্থূলকোণ। একইভাবে ঘুরে যখন OA রশ্মি OX এর ঠিক বিপরীত দিকে OX' অবস্থানে থাকে, তখন উৎপন্ন কোণ XOX' একটি সরলকোণ বা দুই সমকোণ। OA রশ্মি যখন সম্পূর্ণরূপে ঘুরে ঠিক আগের অবস্থানে আসে অর্থাৎ OX সাথে মিলিত হয় তখন মোট উৎপন্ন কোণের পরিমাণ দুই সরলকোণ যা চার সমকোণ হয়।

জ্যামিতিতে কোণের আলোচনা দুই সরলকোণ পর্যন্ত সীমিত রাখা হয় এবং এরূপ জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে কোনো পার্থক্য নাই। কিন্তু যদি মনে করা হয় যে, OA রশ্মিটি সম্পূর্ণরূপে একবার ঘুরার পর আরও কিছু বেশি ঘুরে XOA_1 অবস্থানে গেল, তখন উৎপন্ন XOA_1 কোণের পরিমাণ চার সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। এরূপ ঘুর্ণনের ফলে ত্রিকোণমিতিতে আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন হতে পারে। কিন্তু সমতল জ্যামিতিতে চার সমকোণের চেয়ে বেশি ধারণা করা যায় না।

OA রশ্মির আদি অবস্থান XOX' কোণকে জ্যামিতিতে কোণ বলে গণ্য করা হয় না, কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে XOX' কোণের পরিমাণ শূন্য ধরা হয়।

৮.৩ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ :

উপরোক্ত আলোচনায় আমরা OA রশ্মিকে (চিত্র ৮.১) ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়েছি এবং OA রশ্মি দ্বারা বিভিন্ন চতুর্ভাগে উৎপন্ন কোণসমূহকে ধনাত্মক কোণ হিসাবে বিবেচনা করেছি। সুতরাং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (*Anticlockwise*) ঘুরালে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক (*Positive*) কোণ বলা হয় এবং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে (*Clockwise*) ঘুরালে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক (*Negative*) কোণ বলা হয়।

তাই, উপরের আলোচনা থেকে বলা যায় একটি ধনাত্মক কোণের পরিমাপ $90°$ অপেক্ষা কম হলে ১ম চতুর্ভাগে থাকবে। আবার $360°$ ও $450°$ মধ্যে থাকলেও কোণটি ১ম চতুর্ভাগেই থাকবে। একইভাবে কোনো ধনাত্মক

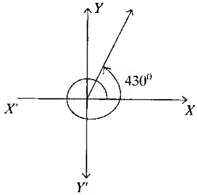
কোণের মান 180° ও 270° এর মধ্যে থাকলে কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে, 90° থেকে 180° এর মধ্যে থাকলে ২য় চতুর্ভাগে এবং 270° ও 360° এর মধ্যে থাকলে ৪র্থ চতুর্ভাগে থাকবে। অনুরূপভাবে একটি ঋণাত্মক কোণের পরিমাপ -90° থেকে 0 এর মধ্যে থাকলে ৪র্থ চতুর্ভাগে, -180° থেকে -90° এর মধ্যে ৩য় চতুর্ভাগে, -270° থেকে -180° এর মধ্যে ২য় চতুর্ভাগে ও -360° থেকে -270°এর মধ্যে থাকলে ১ম চতুর্ভাগে থাকবে। 0° ও 360° বা এর যেকোনো পূর্ণসাংখ্যিক গুণিতক XOX' রেখার এবং 90° ও 270° এদের যেকোনো পূর্ণসাংখ্যিক গুণিতক YOY' রেখার (চিত্র ৮.১) উপর অবস্থান করবে।

চিত্র : ৮.১ নং চিত্রে $\angle AOA_1$ ১ম চতুর্ভাগে, $\angle AOA_2$ ২য় চতুর্ভাগে, $\angle AOA_3$ ৩য় চতুর্ভাগে এবং $\angle AOA_4$ ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

উদাহরণ ১। (i) 430° ও (ii) 545° কোণদ্বয়ের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে নির্ণয় কর।

$$430^\circ = 360^\circ + 70^\circ = 4\times 90^\circ + 70^\circ$$

430° কোণটি ধনাত্মক কোণ এবং 4 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 5 সমকোণ অপেক্ষা ছোট। সুতরাং 430° কোণটি উৎপন্ন করার জন্য কোনো রশ্মিকে 4 সমকোণ বা একবার সম্পূর্ণ ঘুরার পর আরও 70° ঘুরতে হয়েছে (চিত্র : ৮.২)। তাই 430°কোণটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

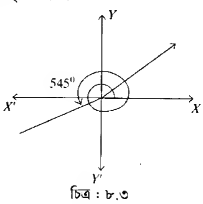


চিত্র : ৮.২

(ii) $545^\circ = 540^\circ + 5^\circ = 6\times 90^\circ + 5^\circ$

545° কোণটি ধনাত্মক এবং 6 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 7 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 545° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 6 সমকোণ বা একবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পর আরও দুই সমকোণের চেয়ে 5° বেশি ঘুরতে হয়েছে (চিত্র : ৮.৩)।

সুতরাং 545°কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।



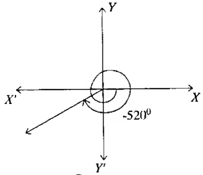
চিত্র : ৮.৩

কাজ : $330°$, $535°$, $777°$ ও $1045°$ কোণসমূহ কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে তা চিত্রসহ দেখাও।

উদাহরণ ২। $(i) -520°$ ও $(ii) -750°$ কোণদ্বয় কোন চতুর্ভাগে আছে নির্ণয় কর।

$$(i) -520° = -450° - 70° = -5 \times 90° - 70°$$

$-520°$ একটি ঋণাত্মক কোণ। $-520°$ কোণটি উৎপন্ন করতে কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরে একই দিকে আরও এক সমকোণ বা $90°$ এবং $70°$ ঘুরে তৃতীয় চতুর্ভাগে আসতে হয়েছে (চিত্র : ৮.৪)। সুতরাং, $-540°$ কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করছে।

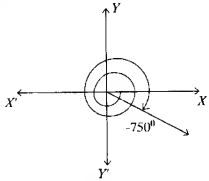


চিত্র : ৮.৪

$$(ii) -750° = -720° - 30° = -8 \times 90° - 30°$$

$-750°$ কোণটি ঋণাত্মক কোণ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে দুইবার সম্পূর্ণ (8 সমকোণ) ঘূরার পর একই দিকে আরও $30°$ ঘুরতে হয়েছে (চিত্র ৮.৫)।

$\therefore -750°$ কোণটির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে।



চিত্র : ৮.৫

কাজ : $-100°, -365°, -720°$ ও $1320°$ কোণসমূহ কোন চতুর্ভাগে আছে, চিত্রসহ নির্ণয় কর।

৮·৪। কোণ পরিমাপের একক

কোনো কোণের মান বা পরিমাণ নির্ণয়ে সাধারণত দুই প্রকার একক (*Unit*) পদ্ধতি ব্যবহার করা হয় :

(১) ষাটমূলক পদ্ধতি (*Sexagesimal System*) ও

(২) বৃত্তীয় পদ্ধতি (*Circular System*)।

(১) ষাটমূলক পদ্ধতি : ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণ যা $90°$কে সমান 90 ভাগে বিভক্ত করে প্রতি ভাগকে এক ডিগ্রি ($1° = One\ degree$) ধরা হয়।

এক ডিগ্রিকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক মিনিট ($1' = One\ Minute$) এবং এক মিনিটকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড ($1'' = One\ Secound$) ধরা হয়।

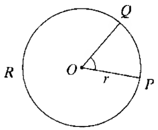
অর্থাৎ, $60''$ (সেকেন্ড) $= 1'$ (মিনিট)

$60'$ (মিনিট) $= 1^\circ$ (ডিগ্রি)

90° (ডিগ্রি) $= 1$ সমকোণ।

বৃত্তীয় পদ্ধতি সম্পর্কে জানার পূর্বে রেডিয়ান সম্পর্কে জানা দরকার।

রেডিয়ান : কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।



চিত্র : ৮.৬

চিত্রে PQR বৃত্তের কেন্দ্র O বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OP = r$ এবং ব্যাসার্ধের সমান চাপ PQ। PQ চাপ কেন্দ্র O তে $\angle POQ$ উৎপন্ন করেছে। উক্ত কোণের পরিমাণই এক রেডিয়ান। অর্থাৎ $\angle POQ$ এক রেডিয়ান।

(২) **বৃত্তীয় পদ্ধতি :** বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ান $(Radian)$ কোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়।

কোণের ডিগ্রি পরিমাপ ও রেডিয়ান পরিমাপের সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত প্রতিজ্ঞাসমূহ এবং কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ সম্পর্কে জানা প্রয়োজন।

প্রতিজ্ঞা ১। যেকোনো দুইটি বৃত্তের স্ব স্ব পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান।

প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি সমকেন্দ্রিক এবং উভয়ের কেন্দ্র O। বৃহত্তর বৃত্তটির পরিধি P ও ব্যাসার্ধ R এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটির পরিধি p ও ব্যাসার্ধ r (চিত্র : ৮.৭)। এখন বৃহত্তর বৃত্তটিকে n সংখ্যক $(n > 1)$ সমান ভাগে বিভক্ত করি। কেন্দ্রের সাথে বিভক্ত বিন্দুগুলো যোগ করলে ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিও n সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত হবে। উভয় বৃত্তে বিভক্ত বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি।

ফলে প্রত্যেক বৃত্তে n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হলো (বৃহত্তর বৃত্তে $ABCD$.........ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তে $abcd$.......)।

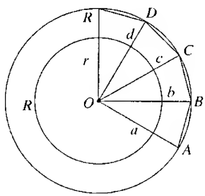
এখন ΔOAB এবং Δoab সদৃশ, কারণ, $\angle AOB^\circ$ এবং $\angle aob$ [সাধারণ কোণ] এবং উভয় ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু বলে বাহু সংলগ্ন কোণগুলো সমান।

$$\therefore \frac{AB}{ab} = \frac{OA}{oa} = \frac{OB}{ob} = \frac{R}{r}$$

অনুরূপভাবে,

$$\frac{BC}{bc} = \frac{R}{r}, \frac{CD}{cd} = \frac{R}{r} \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\therefore \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{R}{r}$$



$$\therefore \frac{AB + BC + CD + \text{..........}}{ab + bc + cd + \text{..............}} = \frac{R + R + R + \text{.....}}{r + r + r + \text{........}} = \frac{nR}{nr} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r} \text{......... (1)}$$

চিত্র : ৮.৭

n যদি যথেষ্ট বড় হয় ($n \to +\infty$) তাহলে AB, BC, CD......... রেখাংশসমূহ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হবে এবং মনে হবে সবাই বৃত্তের ছোট ছোট চাপ।

সুতরাং এক্ষেত্রে,

$AB + BC + CD + ...$ = বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি P

এবং $ab + bc + cd + ...$ = ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি p

$\therefore$ সমীকরণ (১) হতে পাই,

$$\frac{P}{p} = \frac{2R}{2r}$$

অর্থাৎ, $\frac{P}{2R} = \frac{p}{2r}$

অর্থাৎ, $\frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{\text{ক্ষুদ্রত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{ক্ষুদ্রত্তর বৃত্তের ব্যাস}}$

$\therefore$ যেকোনো দুইটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান। (প্রমাণিত)

প্রতিজ্ঞা (১) এর আলোকে মন্তব্য ও অনুসিদ্ধান্ত :

মন্তব্য : ১। যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সবসময় সমান ও একই ধ্রুব সংখ্যা। এ ধ্রুব সংখ্যাটিকে গ্রিক বর্ণ π (পাই) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। π একটি অমূলদ সংখ্যা এবং দশমিকে প্রকাশ করলে এটি একটি অন্তহীন অপৌনঃপুনিক সংখ্যা ($\pi = 3\cdot1415926535897932........$)।

মন্তব্য ২ : সাধারণত চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান $\pi = 3\cdot1416$ ব্যবহার করা হয়। কম্পিউটারের সাহায্যে π এর মান সহস্র লক্ষাধিক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণীত হয়েছে। যেহেতু π এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয় সেহেতু উত্তরও হবে আসন্ন। তাই উত্তরের পাশে 'প্রায়' লেখা অবশ্য কর্তব্য। পরবর্তী সমস্ত কাজে অন্য কোনোরূপ বলা না থাকলে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান $3\cdot1416$ ব্যবহার করা হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'r' হলে, পরিধি হবে $2\pi r$।

প্রতিজ্ঞা ১ এর আলোকে আমরা জানি,

$$\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \text{ধ্রুবসংখ্যা } \pi$$

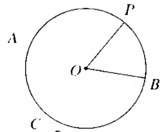
$$\text{বা, পরিধি} = \pi \times \text{ব্যাস}$$

$$= \pi \times 2r \quad [\text{ব্যাস} = 2r]$$

$$= 2\pi r$$

$\therefore$ r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি $2\pi r$।

প্রতিজ্ঞা ২। বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।



চিত্র : ৮.৮

মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OB। P বৃত্তের ওপর অন্য একটি বিন্দু। ফলে BP বৃত্তের একটি চাপ এবং $\angle POB$ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ।

তাহলে, কেন্দ্রস্থ $\angle POB$, চাপ BP. এর সমানুপাতিক হবে।

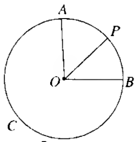
অর্থাৎ, কেন্দ্রস্থ $\angle POB \propto$ চাপ BP ।

প্রতিজ্ঞা ৩। রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে $\angle POB$ এক রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POB$ একটি ধ্রুব কোণ।

অঙ্কন : OB রেখাংশের (ব্যাসার্ধের) ওপর OA লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :



চিত্র : ৮.৯

OA লম্ব বৃত্তের পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে চাপ AB = পরিধির এক-চুতর্থাংশ

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$$

এবং চাপ PB = ব্যাসার্ধ r [$\angle POB$ = এক রেডিয়ান]

প্রতিজ্ঞা ২ থেকে পাই,

$$\frac{\angle POB}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB}$$

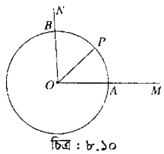
$$\therefore \quad \angle POB = \frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB} \times \angle AOB = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times \text{ এক সমকোণ}$$ [OA ব্যাসার্ধ এবং OB এর ওপর লম্ব]

$$= \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ।}$$

যেহেতু সমকোণ ও π ধ্রুবক সেহেতু $\angle POB$ একটি ধ্রুবক কোণ। (প্রমাণিত)

৮·৫। কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

সংজ্ঞা : বৃত্তীয় পদ্ধতিতে (*Circular System*) অর্থাৎ, রেডিয়ান এককে কোনো কোণের পরিমাপকে এর বৃত্তীয় পরিমাপ (*Circular measure*) বলা হয়।



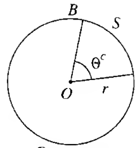
চিত্র : ৮.১০

মনে করি, $\angle MON$ যেকোনো একটি কোণ যার বৃত্তীয় পরিমাপ নির্ণয় করতে হবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে $OA = r$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি।

বৃত্তটি OM ও ON কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$। ব্যাসার্ধ r এর সমান করে AP চাপ নিই (চাপ ও ব্যাসার্ধ একই এককে হতে হবে)।

তাহলে, $\angle AOP = 1$ রেডিয়ান।

ধরি চাপ $AB = S.$



চিত্র : ৮.১১

প্রতিজ্ঞা 2 অনুযায়ী,

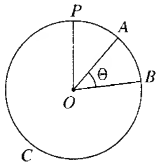
$$\frac{\angle MON}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{ব্যাসার্ধ}'\ OA} = \frac{s}{r}$$

$$\therefore \quad \angle MON = \frac{s}{r} \times \angle AOP$$

$$= \frac{s}{r} \times 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{s}{r} \text{ রেডিয়ান।}$$

$\therefore$ $\angle MON$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ $\frac{s}{r}$, যেখানে কোণটি তার শীর্ষবিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং r ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তে s পরিমাণ চাপ খণ্ডিত করে।

প্রতিজ্ঞা ৪। r ব্যাসার্ধের কোনো বৃত্তে s দৈর্ঘ্যের কোনো চাপ কেন্দ্রে θ পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করলে $s = r\theta$ হবে।



চিত্র : ৮.১২

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OB = r$ একক, চাপ $AB = s$ একক এবং AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $AOB = \theta^c$। প্রমাণ করতে হবে যে, $s = r\theta$।

অঙ্কন : O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA বা OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC বৃত্ত অঙ্কন করি। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB এর সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট BP চাপ আঁকি যেন তা ABC বৃত্তের পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। O, P যোগ করি।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে $\angle POB = 1^c$

আমরা জানি, কোনো বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$$\therefore \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } PB} = \frac{\angle AOB}{\angle POB}$$

$$\text{বা} \quad \frac{s \text{ একক}}{r \text{ একক}} = \frac{\theta^c}{1^c}$$

$$\text{বা} \quad \frac{s}{r} = \theta$$

$\therefore$ $s = r\theta$. [প্রমাণিত]

৮·৬। কোণের ডিগ্রি পরিমাপ ও রেডিয়ান (বৃত্তীয়) পরিমাপের সম্পর্ক

প্রতিজ্ঞা ৩ (চিত্র ৮.৯) এর রেডিয়ান কোণের বর্ণনায় আমরা পাই,

1 রেডিয়ান $= \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ

অর্থাৎ, $1^c = \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ। [1 রেডিয়ান $= 1^c$]

$\therefore$ 1 সমকোণ $= \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^c$

বা, $90^\circ = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^c$

$\therefore$ $1^\circ = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^c$ এবং $1^c = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

লক্ষণীয় :

(i) $90^\circ = 1$ সমকোণ $= \dfrac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $= \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^c$

অর্থাৎ, $180^\circ = 2$ সমকোণ $= \pi$ রেডিয়ান $= \pi^c$.

(ii) ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে D° ও R^c হলে,

$$D^\circ = \left(D \times \frac{\pi}{180}\right)^c = R^c$$

অর্থাৎ, $D \times \dfrac{\pi}{180} = R$

বা, $\dfrac{D}{180} = \dfrac{R}{\pi}$.

উপরোক্ত আলোচনা থেকে বহুল ব্যবহৃত কোণসমূহের ডিগ্রি ও রেডিয়ানের সম্পর্ক দেওয়া হলো :

(i) $1^\circ = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^c$

(ii) $30^\circ = \left(30 \times \dfrac{\pi}{180}\right)^c = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)^c$

(iii) $45^\circ = \left(45 \times \dfrac{\pi}{180^\circ}\right)^c = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^c$

(iv) $60^\circ = \left(60 \times \dfrac{\pi}{180^\circ}\right)^c = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^c$

$(v)\quad 90^0 = \left(90 \times \frac{\pi}{180^0}\right)^c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

$(vi)\quad 180^0 = \left(180 \times \frac{\pi}{180^0}\right)^c = \pi^c$

$(vii)\quad 360^0 = \left(360 \times \frac{\pi}{180^0}\right)^c = (2\pi)^c$

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে রেডিয়ান প্রতীক (c) সাধারণত লেখা হয় না। সংক্ষেপে (রেডিয়ান প্রতীক উহ্য রেখে)

$1^0 = \frac{\pi}{180}$, $30^0 = \frac{\pi}{6}$, $45^0 = \frac{\pi}{4}$, $60^0 = \frac{\pi}{3}$, $90^0 = \frac{\pi}{2}$, $180^0 = \pi$, $360^0 = 2\pi$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য ১ : $1^0 = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c = 0 \cdot 01745^c$ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 = 57 \cdot 29578^0$ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) $= 57^0 17' 44 \cdot 81''$.

এক্ষেত্রে π এর আসন্ন মান $3 \cdot 1416$ ব্যবহার করা হয়েছে।

দ্রষ্টব্য ২ : নিচের সমস্ত উদাহরণ এবং সমস্ত সমস্যার π এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান $(\pi = 3 \cdot 1416)$ পর্যন্ত ব্যবহার করা হবে। π এর আসন্ন মান ব্যবহৃত হলে উত্তরে অবশ্যই 'প্রায়' কথাটি লিখতে হবে।

উদাহরণ ৩।

$(i)\quad 30^0 12' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

$(ii)\quad \frac{3\pi}{13}$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ কর।

সমাধান :

$(i)\quad 30^0 12' 36'' = 30^0 \left(12\frac{36}{60}\right)' = 30^0 \left(12\frac{3}{5}\right)' = 30^0 \left(\frac{63}{5}\right)'$

$= \left(30\frac{63}{5 \times 60}\right)^0 = \left(30\frac{21}{100}\right)^0 = \left(\frac{3021}{100}\right)^0$

$= \frac{3021}{100} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $\left[\because 1^0 = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= \frac{3021\pi}{18000} = \cdot 5273$ রেডিয়ান (প্রায়)

$\therefore\ 30^0 12' 36'' = \cdot 5273^c$ (প্রায়)

$(ii)\quad \frac{3\pi}{13} = \frac{3\pi}{13} \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রি $\left[\because 1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)\right]$

$$= \frac{540}{13} \text{ ডিগ্রি}$$

$$= 41^0 32' 18 \cdot 46''.$$

$\therefore$ $\frac{3\pi}{13}$ রেডিয়ান $= 41^0 32' \cdot 46''.$

উদাহরণ ৪। একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3:4:5$; কোণ তিনটির বৃত্তীয় মান কত ?

সমাধান : ধরি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $3x^c, 4x^c$ ও $5x^c$ ।

প্রশ্নমতে, $3x^c + 4x^c + 5x^c = \pi^c$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ $= \pi^c$]

বা, $12x^c = \pi^c$

বা, $x = \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ কোণ তিনটি যথাক্রমে

$$3x^c = \left(\frac{3\pi}{12}\right)^c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^c = \frac{\pi}{4}$$

$$4x^c = \left(\frac{4\pi}{12}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c = \frac{\pi}{3}$$

$$5x^c = \left(\frac{5\pi}{12}\right)^c = \frac{5\pi}{12}$$

উত্তর : $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$.

উদাহরণ ৫। একটি চাকা $1 \cdot 75$ কিলোমিটার পথ যেতে 40 বার ঘুরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত ?

সমাধান : ধরি চাকার ব্যাসার্ধ r মিটার।

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r$ মিটার ($\pi = 3 \cdot 1416$)

আমরা জানি চাকাটি একবার ঘুরলে এর পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ 40 বার ঘুরায় চাকাটির মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 40 \times 2\pi\, r$ মি.

$= 80\pi\, r$ মিটার

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $80\pi r = 1750$ [1 কি.মি. = 1000 মিটার]

বা, $r = \frac{1750}{80\pi} = \frac{1750}{80 \times 3 \cdot 1416}$ মিটার

$= 6 \cdot 963$ মিটার (প্রায়)।

উত্তর : চাকার ব্যাসার্ধ $6 \cdot 963$ মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৬। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ঢাকা ও জামালপুর কেন্দ্রে 2^0 কোণ উৎপন্ন করলে ঢাকা ও জামালপুরের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : ব্যাসার্ধ = $r = 6440$ কি.মি.

পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\frac{\theta}{\pi} = 2^0 = 2\times\frac{\pi^c}{180}$

$= \frac{\pi}{90}$ রেডিয়ান।

$\therefore$ s = চাপের দৈর্ঘ্য = ঢাকা ও জামালপুরের দূরত্ব = $r\theta = 6640\times\frac{\pi}{90}$ কি.মি.

$= \frac{644\pi}{90}$ কি.মি.

$= 224\cdot 8$ কি.মি. (প্রায়)

উত্তর : $224\cdot 8$ কি.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ৭। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি.। বৃত্তের 11 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

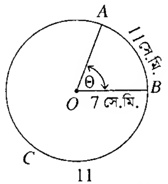
সমাধান : ধরি, ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OB = 7$ সে.মি. এবং চাপ $AB = 11$ সে.মি.। AB চাপের কেন্দ্রস্থ সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ θ নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $s = r\theta$

বা, $\theta = \frac{s}{r} = \frac{11 \text{ সে.মি.}}{7 \text{ সে.মি.}}$

$= 1\cdot 57$ রেডিয়ান (প্রায়)

উত্তর : $1\cdot 57$ রেডিয়ান (প্রায়)।



উদাহরণ ৮। এহসান সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 10 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 28^0 কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 180 মিটার হয়, তবে এহসানের গতিবেগ নির্ণয় কর।

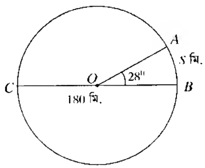
সমাধান : ধরি, এহসান ABC বৃত্তের B বিন্দু থেকে যাত্রা করে 7 সেকেন্ড পরে পরিধির উপর A বিন্দুতে আসে। তাহলে AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB = 28^0$

OB = ব্যাসার্ধ = $\frac{180}{2}$ মিটার = 90 মিটার

ধরি, চাপ $AB = S$ মিটার

আমরা জানি,

$S = r\theta = 90\times 28^0$ মিটার



$= 90 \times 28 \times \frac{\pi}{180}$ মিটার

$= 14\pi$ মিটার

$= 14 \times 3 \cdot 1416$ মিটার (প্রায়)

$= 43 \cdot 98$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ এহসানের গতিবেগ $= \frac{43 \cdot 98}{10}$ মিটার/সেকেন্ড $= 4 \cdot 398$ মিটার/সেকেন্ড

$= 4 \cdot 4$ মিটার/সেকেন্ড (প্রায়)

উত্তর : $4 \cdot 4$ মিটার/সেকেন্ড (প্রায়)

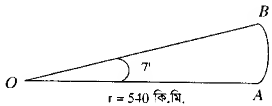
উদাহরণ ৯। 540 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $7'$ কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, AB পাহাড়টির পাদবিন্দু A থেকে 540 কি.মি. দূরে O বিন্দুতে পাহাড়টি $7'$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে $AO = r =$ ব্যাসার্ধ $= 540$ কি.মি.

কেন্দ্রস্থ কোণ $AOB = 7' = \left(\frac{7}{60}\right)^0 = \frac{7\pi}{60 \times 180}$ রেডিয়ান।

চাপ AB পাহাড়টির উচ্চতা $= s$ কি.মি.

আমরা জানি,



$S = r\theta = 540 \times \frac{7\pi}{60 \times 180}$ কি.মি.

$= \frac{7 \times 3 \cdot 1416}{20}$ কি.মি (প্রায়)

$= 1 \cdot 1$ কি.মি. (প্রায়)।

উত্তর : পাহাড়টির উচ্চতা $1 \cdot 1$ কিমি. (প্রায়) বা 1100 মিটার (প্রায়)।

অনুশীলনী ৮·১

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নের সমস্যাগুলোর সমাধান নির্ণয় কর। সমস্ত ক্ষেত্রে π এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত ব্যবহার কর ($\pi = 3 \cdot 1416$)।

১। (ক)। রেডিয়ানে প্রকাশ কর :

(i) $75^0 30'$ (ii) $55^0 54' 53'$ (iii) $33^0 22' 11''$

১। (খ)। ডিগ্রিতে প্রকাশ কর :

(i) $\frac{8x}{13}$ রেডিয়ান (ii) $1 \cdot 3177$ রেডিয়ান (iii) $0 \cdot 9759$ রেডিয়ান

২। একটি কোণকে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D^0 ও R^c দ্বারা প্রকাশ করা হলে, প্রমাণ কর যে $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$.

৩। একটি চাকার ব্যাসার্ধ 2 মিটার 3 সে.মি. হলে, চাকার পরিধির আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৪। একটি গাড়ির চাকার ব্যাস $0\cdot84$ মিটার এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 6 বার ঘুরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

৫। কোনো ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত $2:5:3$ ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয় মান কত ?

৬। একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। কোণগুলোর রেডিয়ান পরিমাপ কত ?

৭। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। ঢাকা ও চট্টগ্রাম পৃথিবীর কেন্দ্রে 5^0 কোণ উৎপন্ন করে। ঢাকা ও চট্টগ্রামের দূরত্ব কত ?

৮। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। টেকনাফ ও তেতুলিয়া পৃথিবীর কেন্দ্রে $10^0 6' 3''$ কোণ উৎপন্ন করে। টেকনাফ ও তেতুলিয়ার মধ্যবর্তী দূরত্ব কত ?

৯। শাহেদ একটি সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 11 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 201 মিটার হয়, তবে শাহেদের গতিবেগ কত ?

১০। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্র $32''$ কোণ উৎপন্ন করে এদের দূরত্ব কত ?

১১। সকাল $9\cdot30$ টায় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

[সংকেত : এক ঘর কেন্দ্রে $\frac{360^0}{60}=6^0$ ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে। $9\cdot30$ টায় ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যে ব্যবধান $\left(15+2\frac{1}{2}\right)$ বা $17\frac{1}{2}$ ঘর]

১২। এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 6 কি.মি. বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে যে বৃত্তচাপ অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর।

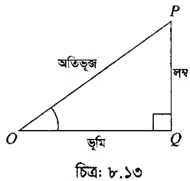
১৩। 750 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $8'$ কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

৮·৭ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (*Trigonometric Ratios*)

ত্রিকোণমিতির এই অংশে প্রথমে সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent) সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। সূক্ষ্মকোণের অনুপাতসমূহের মাধ্যমে যেকোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হবে। অনুপাত সমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক এবং বিভিন্ন চতুর্ভাগে এদের চিহ্ন কী হবে সে সম্পর্কে ব্যাখ্যা করা হবে। ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত কতিপয় অভেদ সম্পর্কে ধারণা দেওয়া হবে। এছাড়াও আদর্শ কোণসমূহের $\left(0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং অনুপাতসমূহের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্নমান অর্থাৎ মানের পরিধি সম্পর্কে আলোচনাও এই অংশে অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

(ক) সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (*Trigonometric Ratios of Acute Angles*) :

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহ নির্ণয় করার জন্য আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ (চিত্র ৮.১৩) OPQ বিবেচনা করি।



চিত্র: ৮.১৩

ΔOPQ এ $\angle OQP$ সমকোণ।

$\angle POQ$ এর সাপেক্ষে : OP ত্রিভুজের অতিভুজ (*Hypotenuse*), OQ ভূমি (*adjacent side*), PQ লম্ব (*opposite side*) এবং $\angle POQ = \theta$ (সূক্ষ্মকোণ)। OPQ সমকোণী ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণ θ এর জন্য ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent) যথাক্রমে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PQ} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$$

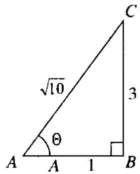
$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} \qquad \sec\theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} \qquad \cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$$

উদাহরণ ১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $\tan\theta = 3$ হলে অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\angle BAC = \theta$



অতিভুজ $= AC$, ভূমি $= AB$

লম্ব $= BC$, এবং

দেওয়া আছে $\tan\theta = 3$

বা, $\tan\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{3}{1}$

$\therefore$ BC লম্ব $= 3$ একক এবং $AB =$ ভূমি $= 1$ একক।

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

অতিভুজ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ একক

$\therefore$ অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$$

এবং $\cot\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{1}{3}$

লক্ষণীয় : যেহেতু অনুপাতের কোনো একক থাকে না এবং sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent এই ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত তাই, এদের কোনো একক নাই।

কাজ : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ । অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

দ্রষ্টব্য : ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহকে সংক্ষেপে লেখা হয়। যেমন :

sine $\theta = \sin\theta$, cosine $\theta = \cos\theta$, tangent $\theta = \tan\theta$,
secant $\theta = \sec\theta$, cosecant $\theta = \operatorname{cosec}\theta$, cotangent $\theta = \cot\theta$

(খ) এই অংশে আমরা যেকোনো কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করব। সে জন্য আমাদের কোণটির প্রমিত বা আদর্শ অবস্থান (Standard position) জানা দরকার। কার্তেসীয় সমতলে মূলবিন্দু থেকে ডানদিকে অর্থাৎ ধনাত্মক দিক x-অক্ষকে আদি রশ্মি ধরে কোণটি অঙ্কন করলেই এর আদর্শ অবস্থান পাওয়া যায়। এখানে θ কে আমরা ত্রিকোণমিতিক কোণ হিসাবে বিবেচনা করব অর্থাৎ θ কোণের পরিমাণ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকবে না।

মনে করি, কার্তেসীয় তলে $X'OX$ রেখা x-অক্ষ $Y'OY$ রেখা y-অক্ষ এবং O বিন্দু মূলবিন্দু। ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA ধনাত্মক x-অক্ষ অর্থাৎ OX রশ্মি থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (anticlockwise) ঘুরে OA অবস্থানে θ কোণ উৎপন্ন করেছে (চিত্র ৮.১৪)।

OX কে θ কোণের আদিবাহু (initial side) এবং OA কে প্রান্তিকবাহু (terminal side) বলা হয়। OA প্রান্তিক বাহুর উপর O বিন্দু ভিন্ন $P(x, y)$ একটি বিন্দু নিই। তাহলে OX থেকে বিন্দুটির লম্ব দূরত্ব y, OY থেকে এর লম্ব দূরত্ব x এবং $\angle OQP$ সমকোণ (চিত্র ৮.১৪)।

সুতরাং পীথাগোরাসের সূত্র অনুসারে অতিভুজ $= |OP| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ । তাহলে যে কোনো কোণের θ এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ হবে :

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{y}{r}$$

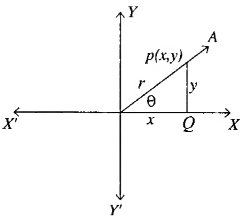
$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x} \quad [x \neq 0]$$

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x} \quad [x \neq 0]$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{r}{y} \quad [y \neq 0]$$

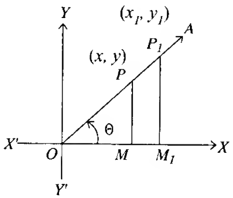
$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{x}{y} \quad [y \neq 0]$$



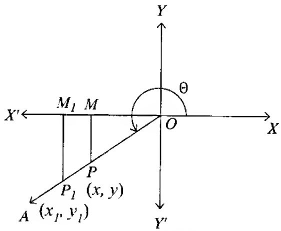
চিত্র : ৮.১৪

লক্ষণীয় ১। P এবং O বিন্দু ভিন্ন হওয়ায় $r = |OP| > 0$ এবং $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ সবসময়ই অর্থবহ। OA প্রান্তিক বাহু x-অক্ষের ওপর থাকলে $y = 0$ হয় বলে এরূপ কোণের জন্য $\operatorname{cosec}\theta$ ও $\cot\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়। অনুরূপভাবে, OA প্রান্তিক বাহু y-অক্ষের ওপর থাকলে $x = 0$ হয় এবং এরূপ কোণের জন্য $\sec\theta$ ও $\tan\theta$ সংজ্ঞায়িত হয় না।

লক্ষণীয় ২। প্রান্তিক বাহু OA এর ওপর $P(x,y)$ বিন্দু ভিন্ন অন্য কোনো বিন্দু $P_1(x_1,y_1)$ নিই (চিত্র ৮.১৫(ক) ও চিত্র ৮.১৫ (খ))। $P(x,y)$ ও $P_1(x_1,y_1)$ বিন্দুদ্বয় থেকে x-অক্ষের ওপর PM ও P_1M_1 লম্ব আঁকি। তাহলে ΔOPM ও ΔOP_1M_1 সদৃশ।



চিত্র ৮.১৫(ক)



চিত্র ৮.১৫(খ)

অর্থাৎ $\dfrac{|x|}{|x_1|}=\dfrac{|y|}{|y_1|}=\dfrac{|OP|}{|OP_1|}=\dfrac{r}{r_1}$

এখানে, $OP=r, OP_1=r_1$, x ও x_1 এবং y ও y_1 একই চিহ্নযুক্ত।

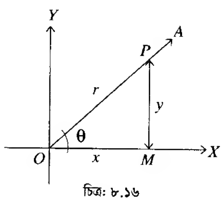
$\therefore\ \dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{r}{r_1}$ অর্থাৎ, $\dfrac{x}{r}=\dfrac{y}{r}$ এবং $\dfrac{x_1}{r_1}=\dfrac{y_1}{r_1}$

সুতরাং $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{y_1}{r_1}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x_1}{r_1}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y_1}{x_1}$ ইত্যাদি।

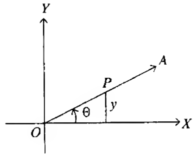
সিদ্ধান্ত : ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান প্রান্তিক রশ্মি OA এর ওপর নির্বাচিত বিন্দু P এর ওপর নির্ভর করে না।



চিত্র: ৮.১৬

লক্ষণীয় ৩। θ সূক্ষ্মকোণ হলে প্রমিত বা আদর্শ অবস্থানে এর প্রান্তিক বাহু OA প্রথম চতুর্ভাগে থাকে এবং $\theta=\angle XOA$ হয় (চিত্র ৮.১৬)। OA বাহুতে যেকোনো বিন্দু $P(x,y)$ নিয়ে এবং P থেকে OX এর ওপর PM লম্ব টেনে দেখা যায় যে, $OM=x, PM=y$ এবং $OP=r$ ধরে পূর্ববর্তী আলোচনার (ক) ও (খ) থেকে θ কোণের অনুপাতগুলোর একই মান পাওয়া যায়।

(গ) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক



ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সংজ্ঞা থেকে আমরা লক্ষ করি যে,

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{1}{\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \text{ এবং } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

অনুরূপভাবে, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$, $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{1}{\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}} = \frac{1}{\cos\theta}$

অর্থাৎ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

একইভাবে, $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

৮·৮ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত কতিপয় সহজ অভেদাবলি (Identities)

(*i*) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

প্রমাণ : পাশের চিত্র থেকে আমরা দেখি যে,

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{y}{r}$$

এবং $r^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (প্রমাণিত)।

(*i*) নং ফলাফল থেকে আমরা পাই, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ বা, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, ..

(*ii*) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ বা, $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

(*iii*) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

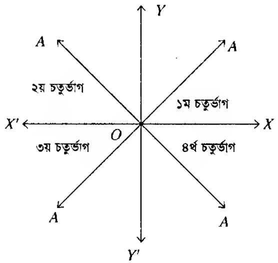
কাজ : প্রমাণ কর যে, (চিত্রের সাহায্যে) :

(*i*) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

(*ii*) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

৮·৯ । বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন

নিচের চিত্রে (চিত্র ৮.১৮) কার্তেসীয় তলকে $X'OX$ এবং $Y'OY$ অক্ষদ্বয় দ্বারা চারটি চতুর্ভাগ (Quadrant) যথাক্রমে XOY (১ম চতুর্ভাগ), YOX' (২য় চতুর্ভাগ) $X'OY'$ (৩য় চতুর্ভাগ) এবং $Y'OX$ (৪র্থ চতুর্ভাগ) বিভক্ত করা হয়েছে।



চিত্র ৮.১৮

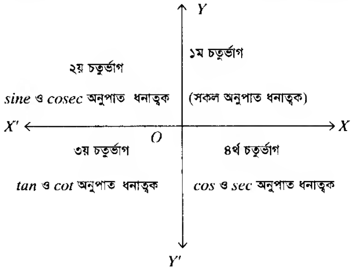
আদি অবস্থান OX থেকে একটি রশ্মি OA, ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনের ফলে OA এর প্রান্তিক অবস্থানের ওপর নির্ভর করে বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন হবে। ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA এর ওপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিই। তাহলে $|OP| = r$ । প্রান্তিক রশ্মি OA এবং P বিন্দুর বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থানের সঙ্গে সঙ্গে x ও y এর চিহ্ন পরিবর্তন হবে কিন্তু r সবসময় ধনাত্মক থাকবে।

OA রশ্মি যখন প্রথম চতুর্ভাগে থাকে, তখন x ও y এর মান ধনাত্মক। তাই প্রথম চতুর্ভাগে সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক। OA রশ্মি যখন দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকে তখন P বিন্দুর ভুজ x ঋণাত্মক এবং কোটি y ধনাত্মক। এজন্য দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\sin\left(\sin\theta = \frac{y}{r}\right)$ এবং $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}\right)$ অনুপাত দুইটি ধনাত্মক অন্যসব অনুপাত ঋণাত্মক। একইভাবে তৃতীয় চতুর্ভাগে P বিন্দুর ভুজ x ও কোটি y উভয়ই ঋণাত্মক এবং $\tan\left(\tan\theta = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}\right)$ ও $\cot\left(\cot\theta = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}\right)$ ধনাত্মক। অন্য অনুপাতসমূহ ঋণাত্মক। চতুর্থ চতুর্ভাগে OA রশ্মির ওপর P বিন্দুর ভুজ x ধনাত্মক এবং কোটি y ঋণাত্মক বলে $\cos\left(\cos\theta = \frac{x}{r}\right)$ এবং $\sec\left(\sec\theta = \frac{r}{x}\right)$ ধনাত্মক এবং অন্যসব ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

আবার, x-অক্ষের উপর P বিন্দুর যেকোনো অবস্থানে y এর মান শূন্য বলে $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}\right)$ এবং $\cot\left(\cot\theta = \frac{x}{y}\right)$ অনুপাত দুইটি সংজ্ঞায়িত নয়।

অনুরূপভাবে, y-অক্ষের ওপর P বিন্দুর যেকোনো অবস্থানে x এর মান শূন্য। তাই y-অক্ষের ওপর $\sec\left(\sec\theta = \frac{r}{x}\right)$ এবং $\tan\left(\tan\theta = \frac{y}{x}\right)$ সংজ্ঞায়িত নয়। $\sin\left(\sin\theta = \frac{y}{r}\right)$ এবং $\cos\left(\cos\theta = \frac{x}{r}\right)$ অনুপাত দুইটি P বিন্দুর যেকোনো অবস্থানেই সংজ্ঞায়িত এবং বাস্তব মান আছে।

উপরোক্ত আলোচনার সারাংশ নিম্নের চিত্রে (চিত্র ৮.১৯) দেখানো হলো উক্ত চিত্রের সাহায্যে যেকোনো কোণের প্রান্তিক রশ্মির অবস্থানের ওপর নির্ভর করে উক্ত কোণের সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় সহজ হবে।



চিত্র: ৮.১৯

৮.১০। আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : এই অংশে বহুল ব্যবহৃত কোণসমূহের $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নিয়ে আমরা একটি টেবিল তৈরি করব, যাতে শিক্ষার্থীগণ সহজেই কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ে সক্ষম হয়। মাধ্যমিক জ্যামিতির দ্বাদশ অধ্যায়ে উলিখিত আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের কৌশল বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে। তাই বিস্তারিত আলোচনায় না গিয়ে আমরা প্রতিক্ষেত্রে অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় করে তা একটি টেবিল বা চার্ট আকারে প্রকাশ করব।

(ক) $\frac{\pi}{6}(30^0)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

পাশের চিত্রে $\angle POB = \frac{\pi}{6}$ এবং $r = 2a$ হলে

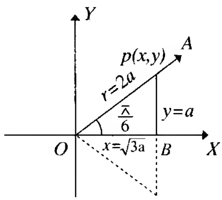
$y = a$ এবং $x = \sqrt{3a}$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{6} = \frac{y}{r} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3a}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{a}{\sqrt{3a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3a}}{a} = \sqrt{3}$$

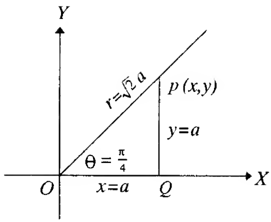


$r=2a$, $x=\sqrt{3}a$, $y=a$

$$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{r}{x}=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}=\frac{r}{y}=\frac{2a}{a}=2$$

(খ) $\frac{\pi}{4}(45^\circ)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ



$r=\sqrt{2}a,\ x=a,\ y=a$

পাশের চিত্রে $\angle POB=\frac{\pi}{4}$ এবং $r=\sqrt{2}a,\ x=a$

$y=a$

$$\therefore\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{y}{r}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{x}{r}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{y}{x}=\frac{a}{a}=1$$

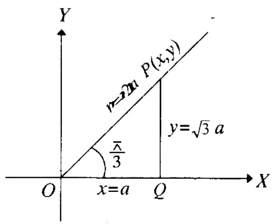
$$\cot\frac{\pi}{4}=\frac{x}{y}=\frac{a}{a}=1$$

$$\sec\frac{\pi}{4}=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$$

(গ) $\frac{\pi}{3}(60^\circ)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

পাশের চিত্র থেকে পাই, $\angle POB=\frac{\pi}{3}$ এবং $x=a,\ y=\sqrt{3}a,\ r=2a$



$r=2a,\ x=a,\ y=\sqrt{3}a$

$$\therefore\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{x}{r}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$$

$$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{x}{y}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

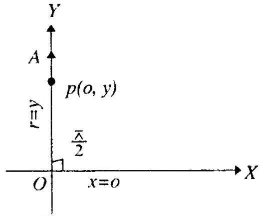
$$\sec\frac{\pi}{3}=\frac{r}{x}=\frac{2a}{a}=2$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}=\frac{r}{y}=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$ এবং (0°) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয়ের জন্য আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা ব্যবহার করব। এখানে উল্লেখ্য যে, শূন্য দ্বারা কোনো কিছুকেই ভাগ করা যায় না বা শূন্য দ্বারা ভাগ গ্রহণযোগ্য নয় *(Divisin by zero is not allowed)* অথবা শূন্য দ্বারা ভাগ অসংজ্ঞায়িত (undefined)।

(ঘ) $\frac{\pi}{2}(90^\circ)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ : এক্ষেত্রে প্রান্তিক রশ্মি OA এর অবস্থান ধনাত্মক y অক্ষ বরাবর বা OY এর ওপর থাকে। ফলে OY এর ওপর যেকোনো বিন্দু P এর স্থানাঙ্কে ভুজ 0 ও কোটি y হবে।

ধরি, $y=a$ তাহলে, $r=a$ হবে।



$x=o,\ y=a,\ r=y=a$

$\therefore\ \sin\frac{\pi}{2}=\frac{y}{r}=\frac{a}{a}=1$

$\cos\frac{\pi}{2}=\frac{x}{r}=\frac{0}{a}=0$

$\tan\frac{\pi}{2}=\frac{y}{x}=\frac{a}{0}$ অসংজ্ঞায়িত অর্থাৎ $\tan\frac{\pi}{2}$ অসংজ্ঞায়িত।

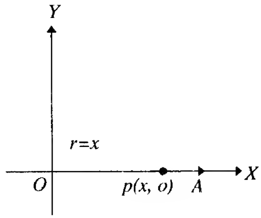
$\cot\frac{\pi}{2}=\frac{x}{y}=\frac{0}{a}=0$

$\sec\frac{\pi}{2}=\frac{r}{x}=\frac{a}{0}$ অসংজ্ঞায়িত অর্থাৎ $\sec\frac{\pi}{2}$ অসংজ্ঞায়িত।

$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2}=\frac{r}{y}=\frac{a}{a}=1$

(ঙ) 0 রেডিয়ান (0°) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ :

এক্ষেত্রে প্রান্তিক রশ্মি OA আঁকি। রশ্মি OX এর ওপর থাকবে। ফলে OA রশ্মির উপর যেকোনো P বিন্দুর স্থানাঙ্কের ভুজ $x=a$ কোটি $y=0$ এবং $r=OP=a$ হবে।



$x=a,\ y=o,\ r=x=a$

$\therefore\ \sin 0=\frac{y}{r}=\frac{0}{a}=0$

$\cos 0=\frac{x}{r}=\frac{a}{a}=1$

$\tan 0=\frac{y}{x}=\frac{0}{a}=0$

$\cot 0=\frac{x}{y}\left(=\frac{a}{0}\right)$ অসংজ্ঞায়িত অর্থাৎ $\cot 0$ অসংজ্ঞায়িত।

$$\sec 0 = \frac{r}{x} = \frac{a}{a} = 1$$

$\operatorname{cosec} 0 = \frac{r}{y}\left(= \frac{a}{0}\right)$ অসংজ্ঞায়িত অর্থাৎ $\operatorname{cosec} 0$ অসংজ্ঞায়িত।

বি.দ্র. : শুধুমাত্র বোঝানোর জন্য $\left(\frac{a}{0}\right)$ লেখা হয়েছে। এটি লেখা ঠিক নয়। শিক্ষার্থীরা সরাসরি অসংজ্ঞায়িত লিখবে।

দশম শ্রেণির সাধারণ জ্যামিতির দ্বাদশ অধ্যায়ে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ তালিকা দেওয়া আছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে তালিকাটি এখানেও সংযোজিত হলো :

কোণ / অনুপাত	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

৮·১১ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান বা মানের পরিধি

চিত্র ৮.২০ লক্ষ করি OA রশ্মি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তনের ফলে θ কোণ উৎপন্ন হয়েছে। যেকোনো θ কোণের প্রমিত বা আদর্শ অবস্থান OA রশ্মির (OA রশ্মি যেকোনো চতুর্ভাগে থাকতে পারে) ওপর P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x, y)$ হলে আমরা পাই, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ [POQ সমকোণী ত্রিভুজ এবং $OP = r$ অতিভুজ]।

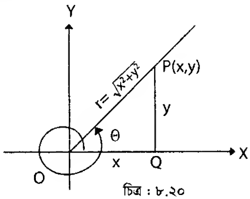
বা, $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $x^2 \le r^2$ এবং $y^2 \le r^2$

বা, $|x| \le r$ এবং $|y| \le r$

বা, $-r \le x \le r$ এবং $-r \le y \le r$

বা, $-1 \le \frac{x}{r} \le 1$ এবং $-1 \le \frac{y}{r} \le 1$ ....(১)



চিত্র : ৮.২০

এখন POQ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে

$$\sin\theta = \frac{x}{r}, \quad \cos\theta = \frac{y}{r} \quad \text{.................................} \ (২)$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{x}, \quad \sec\theta = \frac{r}{y} \quad \text{.................................} \ (৩)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad \text{.................................} \ (৪)$$

তাহলে (১) ও (২) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায় $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$

সুতরাং $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান -1 অপেক্ষা ছোট এবং $+1$ অপেক্ষা বড় নয়।

আবার, (১) ও (৩) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\operatorname{cosec}\theta \ge 1$ বা, $\operatorname{cosec}\theta \le -1$

এবং $\sec\theta \ge 1$ বা, $\sec\theta \le -1$

সুতরাং $\sec\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এবং মান অপেক্ষা ছোট এবং অপেক্ষা বড়।

যেহেতু $\tan\theta = \frac{y}{x}$ এবং $\cot\theta = \frac{x}{y}$

$\therefore$ ভুজ $x = 0$ হলে $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত এবং কোটি $y = 0$ হলে $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত। অসংজ্ঞায়িত এর ধারণাকে অসীম (∞) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করলে আমরা বলতে পারি।

$-\infty < \tan\theta < +\infty$ এবং $-\infty < \cot\theta < +\infty$.

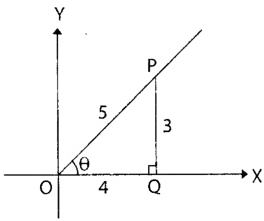
উদাহরণ ১। θ সূক্ষ্মকোণ $\left(O < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ এবং $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে, অন্যসব ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{4}{5}$ [দেওয়া আছে]

পাশের চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ POQ থেকে পাই,

$$PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 \text{ একক}$$



$$\therefore \sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{3}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OP}{OQ} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PQ} = \frac{5}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{4}{3}$$

বিকল্প : ত্রিকোণমিতিক অভেদ (Identities) ব্যবহার করে।

আমরা জানি, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25}$

$$= \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

$\therefore\ \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ, তাই θ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক।

$\therefore\ \sin\theta = \frac{3}{5}$

এখন, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{3}$$

এখন POQ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{\text{লম্ব/অতিভুজ}}{\text{ভূমি/অতিভুজ}} = \frac{PQ/OP}{OQ/OP}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{\text{ভূমি/অতিভুজ}}{\text{লম্ব/অতিভুজ}} = \frac{OQ/OP}{PQ/OP}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{4/5}{4/5} = \frac{4}{3}$$

বি.দ্র : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ত্রিকোণমিতিক অভেদের সাহায্যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$

$\therefore\ \tan\theta = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

আবার, $= \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

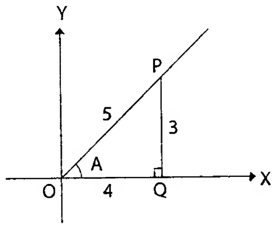
বা, $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$

$\therefore \cot\theta = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

কাজ : θ স্থূলকোণ $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ এবং $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ হলে, অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ সমকোণী ত্রিভুজ এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদ এর সাহায্যে নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২। $\cos A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ এবং A ও B উভয়ই সূক্ষ্মকোণ হলে $\frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B.\tan A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{4}{5}$



আমরা জানি, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

বা, $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$= 1 - \frac{16}{15} = \frac{9}{25}$

$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{9}{24}} = \frac{3}{5}$ [A সূক্ষ্মকোণ]

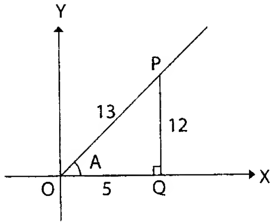
$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

আবার, $\sin B = \frac{12}{13}$

$\therefore \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}}$

$\therefore \cos B = \frac{5}{13}$

$\therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$



এখন, $\frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B.\tan A} = \frac{\frac{12}{5} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{12}{5}.\frac{3}{4}}$

$= \frac{\frac{48-15}{20}}{1 + \frac{36}{20}} = \frac{\frac{33}{20}}{\frac{20+36}{20}} = \frac{33}{56}$

$\therefore \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B.\tan A} = \frac{33}{56}$.

উদাহরণ ৩। মান নির্ণয় কর : $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}+\cot^2\frac{\pi}{2}$

সমাধান : আমরা জানি, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ এবং $\cot\frac{\pi}{2}=0$

$\therefore \sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}+\cot^2\frac{\pi}{2}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{3})^2+(0)^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+3 = 3\frac{3}{4}$

কাজ : ১। $\sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{3}+\tan^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3}+\cot^2\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}$ এর মান নির্ণয় কর।

২। সরল কর : $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}}-\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}}$

উদাহরণ ৪। $7\sin^2\theta-3\cos^2\theta=4$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $7\sin^2\theta-3\cos^2\theta=4$

বা, $7\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)=4 \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

বা, $7\sin^2\theta+3-3\sin^2\theta=4$

বা, $4\sin^2\theta=1$

বা, $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \quad \left[\because \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$

বা, $\tan^2\theta=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$

$\therefore \tan^2\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ৫। $15\cos^2\theta + 2\sin\ \theta = 7$ এবং $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ হলে, $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $15\cos^2\theta + 2\sin\ \theta = 7$

বা, $15\cos^2\theta + 2\sin\ \theta = 7$

বা, $15 - 15\sin^2\theta + 2\sin\theta = 7$ $\quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

বা, $15\sin^2\theta - 2\sin\theta - 8 = 0$

বা, $15\sin^2\theta - 12\sin\theta + 10\sin\theta - 8 = 0$

বা, $(3\sin\theta + 2)(5\sin\theta - 4) = 0$

$\therefore\ \sin\theta = -\dfrac{2}{3}$ বা, $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$

$\sin\theta$ এর উভয় মান গ্রহণযোগ্য। কেননা $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

$\sin\theta = -\dfrac{2}{3}$ হলে $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ হলে $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \dfrac{3}{5}$

$\therefore\ \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}{-\dfrac{2}{3}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\left[\text{যখন } \sin\theta = -\dfrac{2}{3}\right]$

এবং $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$ $\left[\text{যখন } \sin\theta = \dfrac{4}{5}\right]$

Ans : $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ বা, $\dfrac{3}{4}$

উদাহরণ ৬। $A = \dfrac{\pi}{3}$ ও $B = \dfrac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে,

(*i*) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(*ii*) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$

প্রমাণ : (*i*) বামপক্ষ = $\sin(A+B) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

ডানপক্ষ = $\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

প্রমাণ : (ii) বামপক্ষ = $tan(A-B) = tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ডানপক্ষ = $\dfrac{tanA - tanB}{1+tanA\cdot tanB} = \dfrac{tan\frac{\pi}{3} - tan\frac{\pi}{6}}{1+tan\frac{\pi}{3}\cdot tan\frac{\pi}{6}}$

$$= \frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

কাজ : $A=\frac{\pi}{3}$ ও $B=\frac{\pi}{6}$ এর জন্য নিম্নোক্ত অভেদসমূহ প্রমাণ কর :

(i) $sin\,(A-B) = \sin AcosB - cosAsinB$

(ii) $cos\,(A+B) = cos\,AcosB - sinAsinB$

(iii) $cos\,(A-B) = cos\,AcosB + sinAsinB$

(iv) $tan\,2B = \dfrac{2tan\,B}{1-\tan^2 B}$

অনুশীলনী ৮·২

১। ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{cos\frac{\pi}{4}}{cos\frac{\pi}{6}+sin\frac{\pi}{3}}$ (ii) $tan\frac{\pi}{4}+tan\frac{\pi}{6}\cdot tan\frac{\pi}{3}$

২। $cos\theta = -\frac{4}{5}$ এবং $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ হলে $tan\theta$ এবং $sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। $sinA=\frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\frac{\pi}{2}<A<\pi$ এর ক্ষেত্রে $cosA$ এবং $tanA$ এর মান কত ?

৪। দেওয়া আছে, $cos A = \frac{1}{2}$ এবং $cos A$ ও $sin A$ একই চিহ্নবিশিষ্ট। $sin A$ এবং $tan A$ এর মান কত ?

৫। দেওয়া আছে, $\tan A = -\frac{5}{12}$ এবং $tan A$ ও $cos A$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। $sin A$ এবং $cos A$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। নিম্নলিখিত অভেদসমূহ প্রমাণ কর :

(i) $tan\ A + cot\ A = sec A cosec A$

(ii) $\sqrt{\frac{1+cos\theta}{1-cos\theta}} = cosec\theta + cot\theta = \sqrt{\frac{sec\theta+1}{sec\theta-1}}$

(iii) $\sqrt{\frac{1-sin A}{1+sin A}} = sec A - tan A$

(iv) $sec^4\theta - sec^2\theta = tan^4\theta + tan^2\theta$

(v) $(sec\theta - cos\theta)(cosec\theta - sin\theta)(tan\theta + cot\theta) = 1$

(vi) $\frac{tan\theta + sec\theta - 1}{tan\theta - sec + 1} = tan\theta + sec\theta$

৭। যদি $cosec A = \frac{a}{b}$ হয়, যেখানে $a > b > 0$, তবে প্রমাণ কর যে, $tan A = \frac{\pm b}{a^2 - b^2}$

৮। যদি $cos\theta - sin\theta = \sqrt{2} sin\theta$ হয়,তবে দেখাও যে, $cos\theta + sin\theta = \sqrt{2} cos\theta$

৯। $\tan\theta = \frac{x}{y} (x \neq y)$ হলে, $\frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{x\sin\theta - y\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

১০। $tan\theta + sec\theta = x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

১১। $a cos\theta - b sin\theta = c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a sin\theta + b cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

১২। মান নির্ণয় কর :

(i) $sin^2\frac{\pi}{6} + cos^2\frac{\pi}{4} + tan^2\frac{\pi}{3} + cot^2\frac{\pi}{6}$

(ii) $3 tan^2\frac{\pi}{4} - sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} cot^2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} sec^2\frac{\pi}{4}$

(iii) $tan^2\frac{\pi}{4} - sin^2\frac{\pi}{3} tan^2\frac{\pi}{6} tan^2\frac{\pi}{3} \cdot cos^2\frac{\pi}{4}$

(iv) $\frac{tan\frac{\pi}{3} - tan\frac{\pi}{6}}{1 + tan\frac{\pi}{3} tan\frac{\pi}{6}} + cos\frac{\pi}{3} cos\frac{\pi}{6} + sin\frac{\pi}{3} sin\frac{\pi}{6}$

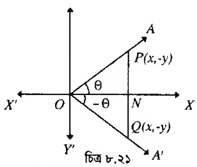
১৩। সরল কর : $\dfrac{1-\sin^2\dfrac{\pi}{6}}{1+\sin^2\dfrac{\pi}{4}}\times\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}}{\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi}{2}-\cot^2\dfrac{\pi}{2}}\div\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\sec^2\dfrac{\pi}{6}-\tan^2\dfrac{\pi}{6}\right)$

৮·১২ ত্রিকোণমিতিক আলোচনার দ্বিতীয় অংশে আমরা সূক্ষ্মকোণের $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করেছি। অনুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক এবং এতদসংক্রান্ত কয়েকটি সহজ অভেদ প্রমাণ করা হয়েছে। বিভিন্ন চতুর্ভাগে অনুপাতসমূহের চিহ্ন নির্ধারণ, আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং অনুপাতসমূহের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের ধারণাও দেওয়া হয়েছে। আলোচনার এই অংশে প্রথমে ঋণাত্মক কোণ $(-\theta)$ এর অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা হবে। এর ওপর ভিত্তি করে ধারাবাহিকভাবে $\dfrac{\pi}{2}-\theta, \dfrac{\pi}{2}+\theta$ $\pi+\theta$, $\pi-\theta$, $\dfrac{3\pi}{2}+\theta, \dfrac{3\pi}{2}-\theta$, $2\pi+\theta$, $2\pi-\theta$ এবং $n\times\dfrac{\pi}{2}+\theta$ ও $n\times\dfrac{\pi}{2}-\theta$ [যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$] কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক আলোচনা অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

৮.১২ (ক) $(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$।

মনে করি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA এর আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA=\theta$ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে একই দূরত্ব ঘুরে চতুর্থ চতুর্ভাগে $\angle XOA'=-\theta$ কোণ উৎপন্ন করে (চিত্র : ৮.২১)। OA রশ্মির ওপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিই। এখন $P(x, y)$ বিন্দু থেকে OX এর ওপর PN লম্ব আঁকি এবং PN কে বর্ধিত করায় তা OA' কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে QN রেখা OX এর ওপর লম্ব। যেহেতু $P(x, y)$ বিন্দুর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে সেহেতু $x>0, y>0$ এবং $ON=x, PN=y$.

এখন ΔOPN ও ΔOQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle PON=\angle QON$, $\angle ONP=\angle ONQ$ এবং ON উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।



চিত্র ৮.২১

$\therefore$ $PN=QN$ এবং $OP=OQ$.

Q বিন্দুর অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে হওয়ায় এর কোটি ঋণাত্মক। সুতরাং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $Q(x,-y)$। OQN সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ON = ভূমি, QN = লম্ব এবং OQ = অতিভুজ = r (ধরি)।

তাহলে পূর্ববর্তী আলোচনা থেকে আমরা পাই,

$$\sin(-\theta)=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{QN}{OQ}=\frac{-y}{r}=-\frac{PN}{OP}=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{ON}{OQ} = \frac{x}{r} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{QN}{ON} = \frac{-y}{r} = -\frac{PN}{ON} = -\tan\theta$$

একইভাবে, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$.

উদাহরণ ৭। $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$, $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4}$,

$\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$, $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sec\frac{\pi}{3}$, $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cot\frac{\pi}{6}$.

৮.১৩ (ক)। $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ কোণ বা পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$।

ধরি, কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA তার আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। আবার অপর একটি রশ্মি OA' আদি অবস্থান OX থেকে একইদিকে ঘুরে $\angle XOY = \frac{\pi}{2}$ কোণ উৎপন্ন করার পর OY অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle YOA' = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে (চিত্র : ৮.২২)।

তাহলে, $\angle XOA' = \frac{\pi}{2} + (-\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$

OP এবং OQ সমান দূরত্ব ধরে P ও Q বিন্দুদ্বয় থেকে OX এর ওপর যথাক্রমে PM ও QN লম্বদ্বয় আঁকি

এখন ΔPOM ও ΔQON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle OMP = \angle ONQ$, $\angle POM = \angle OQN$ এবং $OP = OQ$.

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

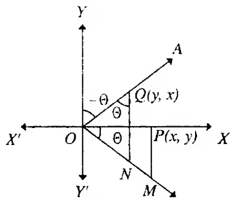
$\therefore$ $ON = PM$ এবং $QN = OM$

তাহলে ΔNOQ এর ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{QN}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{ON}{OQ} = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{QN}{ON} = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$



চিত্র : ৮.২২

একইভাবে, $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$, $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta$

এবং $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$.

উদহরণ ৮। $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$

$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cot\frac{\pi}{3}$

$\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}$

লক্ষণীয় : θ এবং $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ কোণ দুইটি পরস্পর পূরক *(Complement Angle)*। এদের একটি *sine* অপরটির *cosine*, একটির *tangent* অপরটির *cotangent* এবং একটির *secant* অপরটির *cosecant* এর সমান। **শিক্ষার্থীরা বিষয়টি বিশেষভাবে লক্ষ রাখবে।**

৮.১৩ (খ)। $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$।

ধরি, ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA এর আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA=\theta$ এবং একই দিকে আরও ঘুরে $\angle AOA'=\frac{\pi}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে (চিত্র ৮.২৩)। তাহলে,

$\angle XOA=\angle YOA'=\theta$ এবং $\angle XOA'=\frac{\pi}{2}+\theta$ ।

মনে করি, OA রশ্মির ওপর $P(x, y)$ যেকোনো বিন্দু। OA' এর ওপর Q বিন্দুটি এমনভাবে নিই যেন $OP=OQ$ হয়। P ও Q বিন্দু থেকে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি।

$\therefore$ $\angle POM=\angle NQO=\angle YOQ=\theta$. $OM=x$, $PM=y$, $ON=|x'|=-x$, $QN=|y'|=y'$

এখন সমকোণী ত্রিভুজ POM ও QON এর মধ্যে $\angle POM=\angle NQO$

$\angle PMO=\angle QNO$ সমকোন

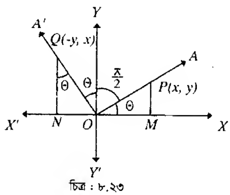
এবং $OP=OQ=r$ (ধরি)।

$\therefore$ ΔPOM ও ΔQON সর্বসম।

$ON=PM$, $QN=OM$

অর্থাৎ $|-x'|=y$

$y'=x'$



চিত্র : ৮.২৩

$\therefore$ আমরা পাই ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{QN}{OQ} = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{ON}{OQ} = \frac{-x'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{QN}{ON} = \frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$$

একইভাবে,

$$\cos ec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sec\theta\ ,\ \ \sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cos ec\theta$$

এবং $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\tan\theta$.

উদহরণ ৯ । $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

কাজ : $\sec\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\cos ec\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ এবং $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

৮.১৪ (খ)। $(\pi+\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ ।

ধরি ঘুর্ণায়মান রশ্মি OA আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA=\theta$ এবং একই দিকে আরও ঘুরে তৃতীয় চতুর্ভাগে $\angle AOA'=\pi$ কোণ উৎপন্ন করে (চিত্র : ৮.২৪)।
তাহলে $\angle XOA'=(\pi+\theta)$.

এখন OA রশ্মির ওপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিই। OA' এর উপর $Q\,(x', y')$ বিন্দুটি এমনভাবে নিই যেন, $OP=OQ=r$ হয়।

P ও Q হতে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি।

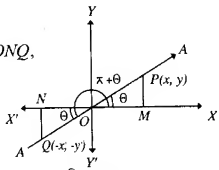
$\therefore\ OM=x,\ PM=y,\ ON=|x'|=-x',\ QN=|y'|=-y'$

ΔPOM ও ΔQON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle OMP=\angle ONQ$, $\angle POM=\angle QON$ এবং $OP=OQ=r$ । সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore\ ON=OM,\ QN=PM$

অর্থাৎ

$\therefore$ আমরা পাই, $|-x'|=x,\ |-y'|=y$



চিত্র : ৮.২৪

$$\sin(\pi+\theta) = \frac{QN}{OQ} = \frac{-y'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{-x'}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{-y'}{-x'} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

অনুরূপভাবে,

$\operatorname{cosec}(\pi+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(\pi+\theta) = -\sec\theta$ এবং $\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$.

উদাহরণ ১০। $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

কাজ : $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $\operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ এবং $\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

৮.১৪ (ক)। $(\pi-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$।

ধরি, ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOA = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। রশ্মিটি একই দিকে আরও ঘুরে $\angle XOX' = \pi$ কোণ উৎপন্ন করার পর OX' থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle X'OA' = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে (চিত্র : ৮.২৫)।

তাহলে $\angle XOA' = \pi + (-\theta) = \pi - \theta$.

OA রশ্মির ওপর $P(x, y)$ যেকোনো বিন্দু নিই এবং ধরি $OP = r$ ।

OA' রশ্মির ওপর Q যেকোনো বিন্দু নিই যেন $OP = OQ = r$ এবং $Q(x', y')$

এখন ΔOMP ও ΔONQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle OMP = \angle ONQ$, $\angle POM = \angle QON$

এবং $OP = OQ = r$

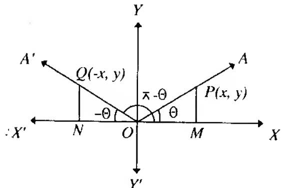
সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore\ ON = OM,\ QN = PM,\ ON = |x'| = -x'$

$\therefore\ QN = |y'| = y'$ অর্থাৎ $|-x'| = x, |y'| = y$

$|OM| = |ON| = x$ এবং $|PM| = |QN| = y$

$\therefore\ Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $Q(-x, y)$.



চিত্র : ৮.২৫

তাহলে, আমরা পাই,

$$\sin(\pi-\theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{y'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = \frac{ON}{OQ} \quad \frac{-x'}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta) = \frac{y}{-x} = -\tan\theta$$

অনুরূপভাবে,

$\operatorname{cosec}(\pi-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ এবং $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$.

উদাহরণ ১১। $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

> **কাজ :** $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ এবং $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

লক্ষণীয় : θ এবং $(\pi-\theta)$ কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক। সম্পূরক কোণের $\sin e$ ও $\cos ecant$ সমান ও একই চিহ্নবিশিষ্ট; কিন্তু $\cos ine$, $\sec ant$, $\tan gent$ ও $\cot angent$ সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

৮.১৫ (ক)। $\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতি অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$।

পূর্ববর্তী আলোচনার ৮.১৩ (ক) ও ৮.১৪ (ক) এর মাধ্যমে আমরা পাই,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

অনুরূপভাবে,

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sec\theta\ ,\ \sec\left(\frac{4\pi}{2}-\theta\right)=-\operatorname{cosec}\theta$$

এবং $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$.

৮.১৫ (খ)। $\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$।

পূর্ববর্তী আলোচনার ৮.১৩ (খ) ও ৮.১৪ (খ) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-(-\sin\theta)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\tan\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

অনুরূপভাবে,

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sec\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta .$$

৮.১৬ (ক)। $(2\pi-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$।

প্রমিত বা আদর্শ অবস্থানে $(2\pi-\theta)$ কোণের অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে এবং $(-\theta)$ কোণের সাথে মিলে যায়। তাই $(-\theta)$ ও $(2\pi-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমান।

$\therefore\quad \sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(2\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(2\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\operatorname{cosec}(2\pi-\theta)=\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(2\pi-\theta)=\sec(-\theta)=\sec\theta$

এবং $\cot(2\pi-\theta)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$

৮.১৬ (খ)। $(2\pi+\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(O<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

প্রমিত বা আদর্শ অবস্থানে $(2\pi+\theta)$ কোণের অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে থাকায় θ কোণের ও $(2\pi+\theta)$ কোণের অনুপাতসমূহ একই হবে।

সুতরাং

$\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta,\ \cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

$\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta,\ \operatorname{cosec}(2\pi+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(2\pi+\theta)=\sec\theta,\ \cot(2\pi+\theta)=\cot\theta .$

৮.১৭। যেকোনো কোণের অর্থাৎ, $\left(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের পদ্ধতি $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$।

নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়:

ধাপ ১ : (ক) প্রথমে প্রদত্ত কোণকে দুইভাগে ভাগ করতে হবে যার একটি অংশ $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{\pi}{2}$ এর n গুণিতক এবং অপরটি সূক্ষ্মকোণ। অর্থাৎ প্রদত্ত কোণকে $\left(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

ধাপ ২ : n জোড় সংখ্যা হলে অনুপাতের ধরন একই থাকবে অর্থাৎ $\sin e$ অনুপাত $\sin e$ থাকবে, $\cos ine$ অনুপাত $\cos ine$ থাকবে ইত্যাদি।

n বিজোড় হলে $\sin e$, $\tan gent$ ও $\sec ant$ অনুপাতগুলো $\cos ine$, $\cot angent$ ও $\cos ecant$ এ পরিবর্তিত হবে। একইভাবে, $\cos ine$, $\cot angent$ ও $\cos ecant$ যথাক্রমে $\sin e$, $\tan gent$ ও $\sec ant$ এ পরিবর্তিত হবে।

ধাপ ৩ : $\left(n\times\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে সেটা জানার পর ঐ চতুর্ভাগে প্রদত্ত অনুপাতের যে চিহ্ন সেই চিহ্ন ধাপ-২ থেকে নিরূপিত অনুপাতের পূর্বে বসাতে হবে।

বি.দ্র.: ৮.১৭ থেকে বর্ণিত পদ্ধতির সাহায্যে যেকোনো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় সম্ভব বলে শিক্ষার্থীদের এই পদ্ধতিতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের জন্য উপদেশ দেওয়া হলো।

উদাহরণ ১২। $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ কোণের ক্ষেত্রে $n=9$ একটি বিজোড় সংখ্যা। তাই $\sin$ পরিবর্তিত হয়ে $\cos$ হবে। আবার, $\left(9\cdot\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ দশম বা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে $\sin$ এর চিহ্ন ধনাত্মক।

$\therefore\ \sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$.

$\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)$ এর ক্ষেত্রে $n=9$ বিজোড় এবং $\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)$ প্রথম চতুর্ভাগে থাকায় $\sin$ এর চিহ্ন ধনাত্মক।

$\therefore\ \sin\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$.

$\tan\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ এর ক্ষেত্রে $n=9$ বিজোড় বলে $\tan$ হবে $\cot$ এবং $\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকায় $\tan$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক।

$\therefore\ \tan\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$.

একইভাবে, $\tan\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

কাজ : $\sin\left(\frac{11\pi}{2}\pm\theta\right)$, $\cos(11\pi\pm\theta)$, $\tan\left(17\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$, $\cot(18\pi\pm\theta)$, $\sec\left(\frac{19\pi}{2}\pm\theta\right)$, এবং $\operatorname{cosec}(8\pi\pm\theta)$ অনুপাতসমূহকে θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ কর।

৮.১৮। কতিপয় উদাহরণ :

উদাহরণ ১৩। (*i*) $\sin(10\pi+\theta)$, (*ii*) $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

(*iii*) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$, (*iv*) $\cot\left(\theta-\frac{9\pi}{2}\right)$ ও

(*v*) $\sec\left(-\frac{17\pi}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : (*i*) $\sin(10\pi+\theta) = \sin\left(20\times\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

এখানে, $n=20$ এবং $\sin\left(20\times\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \sin(10\pi+\theta)=\sin\theta$.

(*ii*) $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(12\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

এখানে $n=12$ এবং $\frac{19\pi}{3}$ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

(*iii*) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \tan\left(4\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{6}$ [$n=4$ ও চতুর্থ চতুর্ভাগ]

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(*iv*) $\cot\left(\theta-\frac{9\pi}{2}\right) = \cot\left\{-\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)\right\}$

$= -\cot\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)$ $\qquad [\therefore \cot\theta\,(-\theta) = -\cot\theta]$

$= -\cot\left(9\times\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$= -(-\tan\theta)$

$= \tan\theta$ $\qquad [n = 9, \left(\frac{9\pi}{2}\right)-\theta$ এর অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে]

$[\therefore \cot\theta\,(-\theta) = -\cot\theta]$

$(v)\ \sec\left(-\frac{17\pi}{2}\right) = \sec\left(\frac{17\pi}{2}\right)$ $\quad [\because \sec(-\theta) = \sec\theta]$

$= \sec\left(17\times\frac{\pi}{2}+0\right)$

$= \operatorname{cosec}0$ $\qquad [n = 17, \frac{17\pi}{2}$ y অক্ষের ওপর] (অসংজ্ঞায়িত)

উদাহরণ ১৪। মান নির্ণয় কর :

$(i)\ \sin\frac{11}{90}\pi + \cos\frac{1}{30}\pi + \sin\frac{101}{90}\pi + \cos\frac{31}{30}\pi + \cos\frac{5}{3}\pi$

$(ii)\ \cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{16\pi}{15} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$

সমাধান : $(i)\ \sin\frac{11}{90}\pi + \cos\frac{1}{30}\pi + \sin\frac{101}{90}\pi + \cos\frac{31}{30}\pi + \cos\frac{5}{3}$

$= \sin\frac{22\pi}{180} + \cos\frac{6}{180}\pi + \sin\frac{202}{180}\pi + \cos\frac{186}{180}\pi + \cos\frac{300}{180}\pi$

$= \sin\frac{22}{180}\pi + \cos\frac{6}{180}\pi + \sin\left(\pi + \frac{22}{180}\pi\right) + \cos\left(\pi + \frac{6}{180}\pi\right) + \cos\left(2\pi - \frac{60}{180}\pi\right)$

$= \sin\frac{22}{180}\pi + \cos\frac{6}{180}\pi - \sin\frac{22}{180}\pi - \cos\frac{6}{180}\pi + \cos\frac{60}{180}\pi$

$= \cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}$.

$(ii)\quad \cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{16\pi}{15} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$

$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{32\pi}{30} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$

$$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \left\{\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{30}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2}{30}\pi\right)\right\}^2$$

$$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13}{30}\pi + \left(-\sin\frac{13\pi}{30}\right)^2 + \left(-\sin\frac{2\pi}{30}\right)^2$$

$$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \sin^2\frac{13\pi}{30} + \sin^2\frac{2\pi}{30}$$

$$= \left(\cos^2\frac{2\pi}{30} + \sin^2\frac{2\pi}{30}\right) + \left(\cos^2\frac{13\pi}{30} + \sin^2\frac{13}{30}\pi\right) = 1 + 1 = 2$$

উদাহরণ ১৫। $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$

প্রমাণ : $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।

অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{5}{12} = \frac{-5}{-12} = \frac{y}{x}$

$\therefore\ x = -12,\ y = -5$

$\therefore\ r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25}$

$= \sqrt{169} = 13$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{-y}{r} = -\frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{-x}{r} = -\frac{-12}{13}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{13}{12}$

$\therefore\ \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ $\quad [\because \text{Cos}\,(-\theta) + \cos\theta,\ \sec(-\theta = \sec\theta\,]$

$$= \frac{-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{-\frac{13}{12} + \frac{5}{12}} = \frac{-\frac{17}{13}}{-\frac{8}{12}} = \frac{17}{13} \times \frac{12}{8} = \frac{51}{26}$$ [প্রমাণিত]।

উদাহরণ ১৬। $\theta = \frac{\pi}{6}$ হলে নিম্নোক্ত অভেদের (সূত্রের) সত্যতা যাচাই কর।

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \cos 2\theta = \cos\left(2.\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad \left[\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right]$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \left[\because\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$2\cos^2\theta - 1 = 2\cos^2\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2\cdot\frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\pi}{6} = 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\tan^2\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \qquad \left[\because\ \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ [যাচাইকৃত]

[বি.দ্র : উপরোক্ত অভেদসমূহ θ এর যেকোনোর মানের জন্য সত্য) পরবর্তী পর্যায়ে অভেদসমূহ প্রমাণ করা হবে]

উদাহরণ ১৭। $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ হলে θ এর মান কত ?

সমাধান : $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক হওয়ায় θ এর অবস্থান দ্বিতীয় বা চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকবে।

দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\tan\theta = -\sqrt{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$= \tan\frac{2\pi}{3}$$

$\therefore\ \theta = \frac{2\pi}{3}$

এটি গ্রহণযোগ্য মান। কারণ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

আবার, চতুর্থ চতুর্ভাগে $\tan\theta = -\sqrt{3} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \tan\frac{5\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = \frac{5\pi}{3}$ যা $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ শর্ত পালন করে।

$\therefore\ \theta$ এর নির্ণেয় মান, $\frac{2\pi}{3}$ ও $\frac{5\pi}{3}$.

উদাহরণ ১৮। সমাধান কর $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$:

(*i*) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

(*ii*) $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

সমাধান : (*i*) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\left(\sqrt{2}\cos\theta - 1\right)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(*ii*) $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $(1 + \sin\theta)^2 = (\sqrt{3}\cos\theta)^2$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta = 3\cos^2\theta$

বা, $1+2\sin\theta+\sin^2\theta=3(1-\sin^2\theta)$

বা, $1+2\sin\theta+\sin^2\theta+3\sin^2\theta=3$

বা, $4\sin^2\theta+2\sin\theta=2$

বা, $2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

বা, $2\sin^2\theta+2\sin\theta-\sin\theta-1=0$

বা, $(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

$\therefore\ 2\sin\theta-1=0$ বা, $\sin\theta+1=0$

অর্থাৎ, $\sin\theta=\frac{1}{2}$ বা, $\sin\theta=-1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ এর জন্য $\sin\theta=-1$ হতে পারে না বলে এটি গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$ নির্ণেয় সমাধান।

উত্তর : $\theta=\frac{\pi}{6}$

বি.দ্র. : যদি $0<\theta<2\pi$ হতো, তাহলে $\sin\theta=\frac{1}{2}$ এবং $\sin\theta=-1$ উভয় মান গ্রহণযোগ্য হতো ; সেক্ষেত্রে সমাধান হতো $\theta=\frac{\pi}{6}$ অথবা $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

উদাহরণ ১৯। $0<\theta<2\pi$ হলে, নিম্নোক্ত সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় কর :

(*i*) $\sin^2\theta-\cos^2\theta=\cos\theta$

(*ii*) $2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3})=\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$

সমাধান : (*i*) $\sin^2\theta-\cos^2\theta=\cos\theta$

বা, $1-\cos^2\theta-\cos^2\theta=\cos\theta$

বা, $1-2\cos^2\theta-\cos\theta=0$

বা, $2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

বা, $(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$

$\therefore\ 2\cos\theta-1=0$ অথবা $\cos\theta+1=0$

অর্থাৎ, $\cos\theta=\frac{1}{2}$ অথবা $\cos\theta=-1$

অর্থাৎ, $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{3}$ অথবা $\cos\theta=\cos\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3},\ \pi$.

যেহেতু $0<\theta<2\pi$ সেহেতু উভয় মান গ্রহণযোগ্য।

নির্ণেয় সমাধান : $\theta=\frac{\pi}{3},\ \pi$.

(ii) $2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3})=\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$

বা, $4(\sin^2\theta\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3)=3\cos^2\theta+8\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta+\cancel{8\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}+12=3\cos^2\theta+\cancel{8\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta+12=3\cos^2\theta+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)+12=3(1-\sin^2\theta)+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta-4\sin^4\theta+12=3-3\sin^2\theta+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^4\theta+9\sin^2\theta-9=0$

বা, $4\sin^4\theta+12\sin^2\theta-3\sin^2\theta-9=0$

বা, $(4\sin^2\theta-3)(\sin^2\theta+3)=0$

$\therefore$ $4\sin^2\theta-3=0$ বা, $\sin^2\theta+3=0$

অর্থাৎ, $4\sin^2\theta=3$ বা $\sin^2\theta=-3$

$\therefore$ $\sin^2\theta=\frac{3}{4}$ [$\sin^2\theta=-3$ হতে পারে না বলে গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $-1\le\sin\theta\le1$]

বা, $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

অর্থাৎ, $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}$ এবং $\sin\theta=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{3}$ এবং $\theta=\frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$

অনুশীলনী ৮.৩

১। $\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\sin 2A$ এর মান কত ?

ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ. $\frac{1}{2}$

গ. 1 ঘ. $\sqrt{2}$

২। - 300^0 কোণটি কোন্ চতুর্ভাগে থাকবে ?

ক. প্রথম খ. দ্বিতীয়
গ. তৃতীয় ঘ. চতুর্থ

৩। $\sin\theta + \cos\theta = 1$ হলে এর মান হবে–

i 0^0
ii 30^0
iii 90^0

নিচের কোনটি সঠিক ?

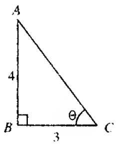
ক. i খ. ii
গ. i ও ii ঘ. i ও iii

৪. পাশের চিত্র অনুসারে

(i) $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

(ii) $\sin\theta = \dfrac{5}{3}$

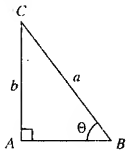
(iii) $\cos^2\theta = \dfrac{9}{25}$



নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i , ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ৫ নং ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৫। $\sin B + \cos C =$ কত ?

ক. $\dfrac{2b}{a}$ খ. $\dfrac{2a}{b}$

গ. $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ ঘ. $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

৬। $\tan B$ এর মান কোনটি ?

ক. $\dfrac{a}{a^2-b^2}$ খ. $\dfrac{b}{a^2-b^2}$

গ. $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ঘ. $\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

৭। মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 7\pi$ (ii) $\cos\dfrac{11\pi}{2}$ (iii) $\cot 11\pi$ (iv) $\tan\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)$

(v) $\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{3}$ (vi) $\sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$ (vii) $\sin\frac{31\pi}{6}$ (viii) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

৮। প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos\frac{17\pi}{10}+\cos\frac{13\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}=0$

(ii) $\tan\frac{\pi}{12}\ \tan\frac{5\pi}{12}\ \tan\frac{7\pi}{12}\ \tan\frac{11\pi}{12}=1$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}=2$

(iv) $\sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6}=1$

(v) $\sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13}{6}\pi-\sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=1$

(vi) $\tan\theta=\frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{14}{5}$.

৯। মান নির্ণয় কর :

(i) $\cos\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{31\pi}{36}-\sin\frac{5\pi}{36}$

(ii) $\cot\frac{\pi}{20}\ \cot\frac{3\pi}{20}\ \cot\frac{5\pi}{20}\ \cot\frac{7\pi}{20}\ \cot\frac{9\pi}{20}$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$

(iv) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

(v) $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

১০। $\theta=\frac{\pi}{3}$ হলে নিম্নোক্ত অভেদসমূহ প্রমাণ কর :

(i) $\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

(ii) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(iii) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

(iv) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

১১। প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে α (আলফা) এর মান নির্ণয় কর :

(i) $\cot\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

(ii) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

(iii) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

(iv) $\cot\alpha = -1$; $\pi < \alpha < 2\pi$

১২। সমাধান কর : (যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

(i) $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$

(ii) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

(iii) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

(iv) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

(v) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

১৩। সমাধান কর : (যখন $0 < \theta < 2\pi$)

(i) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

(ii) $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

(iii) $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

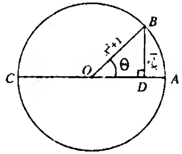
(iv) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

(v) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

(vi) $5\operatorname{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\operatorname{cosec}\theta - 2 = 0$

(vii) $2\sin x\cos x = \sin x (0 \le x \le 2\pi)$.

১৪।

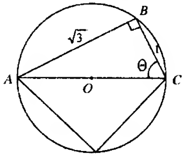


ক. চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা এবং চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য 25 সে.মি. হলে θ = কত ? চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে ?

খ. ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে ?

গ. চিত্রে ΔBOD হলে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

১৫।



ক. চিত্রে O, বৃত্তের কেন্দ্র হলে $\angle B$ এর বৃত্তীয়মান এবং AC নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = O$

গ. $\sec\theta + \cos\theta = P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর।

নবম অধ্যায়

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

(Exponential & Logarithmic Function)

সমসাময়িক বাস্তবতায় সূচক ও লগারিদমীয় ফাংশনের অনেক প্রয়োগ বিধায় এর চর্চা অব্যাহত রয়েছে। যেমন জনসংখ্যা বৃদ্ধি, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ইত্যাদিতে উভয় ফাংশনের প্রয়োগ বিদ্যমান।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- মূলদ সূচক ও অমূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- মূলদ ও অমূলদ সূচকের জন্য বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সূচক ও লগারিদমের পারস্পরিক সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লগারিদমের বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- লগারিদমের ভিত্তি পরিবর্তন করতে পারবে।
- সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশনের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ফাংশনসমূহের লেখচিত্র অঙ্কনে আগ্রহী হবে।
- সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশনসমূহকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করতে পারবে।
- ক্যালকুলেটরের সাহায্যে লগ ও প্রতিলগ নির্ণয় করতে পারবে।

৯·১ মূলদ ও অমূলদ সূচক : মাধ্যমিক বীজগণিতে আলোচিত কিছু বিষয় যা এ অধ্যায়ের আলোচনার স্বার্থে উল্লেখ করা হলো :

R, সকল বাস্তব সংখ্যার সেট

N, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

Z, সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট

Q, সকল মূলদ সংখ্যার সেট নির্দেশ করে।

ধরি a একটি অখণ্ড সংখ্যা বা ভগ্নাংশ যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে এবং n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তাহলে a কে n বার গুণ করলে গুণফলটিকে লেখা হয় $a^n = a \cdot a \cdot a............, a$ (n বার a)
এবং a^n কে বলা হয় a এর n ঘাত। এরূপ ক্ষেত্রে a কে বলা হয় নিধান বা ভিত্তি ($base$) এবং n কে বলা হয় a এর ঘাতের সূচক (exp$onent$) অথবা a এর সূচক।

সুতরাং 3^4 এর ক্ষেত্রে ভিত্তি 3 এবং সূচক 4

আবার, $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ এবং ক্ষেত্রে ভিত্তি $\frac{2}{3}$ এবং সূচক 4।

সংজ্ঞা : সকল $a \in R$ এর জন্য

(১) $a^1 = a$

(২) $a^n = a \cdot a \cdot a ....a$ (n সংখ্যক উৎপাদক), যেখানে, $n \in N, n > 1$

অমূলদ সূচক :

অমূলদ সূচকের জন্য $a^x (a > 0)$ এর মান এমনভাবে নির্দিষ্ট করা হয় যে, x এর মূলদ আসন্ন মান p এর জন্য a^p এর মান a^x এর মানের আসন্ন হয়। উদাহরণস্বরূপ, $3^{\sqrt{5}}$ সংখ্যাটি বিবেচনা করি। আমরা জানি, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{5} = 2 \cdot 236067977.........$ (এই মান ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে এবং দশমিক বিস্তার যে অনন্ত তা $\sqrt{5}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে)। $\sqrt{5}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$p_1 = 2 \cdot 23$ $\quad p_2 = 2 \cdot 236$ $\quad p_3 = 2 \cdot 2360$

$p_4 = 2 \cdot 236067$ $\quad p_5 = 2 \cdot 2360679$ $\quad p_6 = 2 \cdot 23606797$

বিবেচনা করে $3^{\sqrt{5}}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$q_1 = 3^{2 \cdot 23} = 11 \cdot 5872505................$

$q_2 = 3^{2 \cdot 236} = 11 \cdot 6638822................$

$q_3 = 3^{2 \cdot 2360} = 11 \cdot 6638822................$

$q_4 = 3^{2 \cdot 236067} = 11 \cdot 6647407................$

$q_5 = 3^{2 \cdot 2360679} = 11 \cdot 6647523................$

$q_6 = 3^{2 \cdot 23606797} = 11 \cdot 6647532................$

পাওয়া যায় (এই মানগুলো ও ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে)

বাস্তবিক পক্ষে, $3^{\sqrt{5}} = 11 \cdot 6647533.........$

৯·২ সূচক সম্পর্কিত সূত্র :

সূত্র ১ : $a \in R$ এবং $n \in N$ হলে, $a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n \cdot a$.

প্রমাণ : সংজ্ঞানুযায়ী $a^1 = a$ এবং $n \in N$ এর জন্য $a^{n+1} = \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a ...... a}_{n \text{ সংখ্যক}} \cdot a}^{n+1 \text{ সংখ্যক}} = a^n \cdot a$

দ্রষ্টব্য : N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

সূত্র ২ : $n \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

প্রমাণ : যেকোনো $m \in N$ নির্দিষ্ট করে এবং n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.......(1) বিবেচনা করি।

(1) এ $n = 1$ বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$ ডানপক্ষ [সূত্র ১]

$\therefore$ $n=1$ এর জন্য (1) সত্য।

এখন ধরি, $n=k$ এর জন্য (1) সত্য। অর্থাৎ, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ .. .... (২)

তাহলে, $a^m \cdot a^{k+1} = a^m(a^k \cdot a)$ [সূত্র ১]

$=(a^m \cdot a^k)\cdot a$ [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k} \cdot a$ [আরোহ কল্পনা]

$= a^{m+k+1}$ [সূত্র ১]

অর্থাৎ, $n=k+1$, এর জন্য (1) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) সত্য।

$\therefore$ যেকোনো $m, n \in N$ এর জন্য $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\boxed{\therefore\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

বর্ণিত সূত্রটিকে সূচকের মৌলিক সূত্র বলা হয়।

সূত্র ৩। $a \in R,\ a \neq 0$ এবং $m, n \in N$ হলে, $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{যখন } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{যখন } m < n \end{cases}$

প্রমাণ : (১) মনে করি, $m > n$ তাহলে $m-n \in N$

$\therefore$ $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$ [সূত্র ২]

$\therefore$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

(২) মনে করি, $m < n$ তাহলে $n-m \in N$

$\therefore$ $a^{n-m} \cdot a^m = a^{(n-m)+m} = a^n$ [সূত্র ২]

$\therefore$ $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

দ্রষ্টব্য : সূত্রটি গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ কর [সূত্র ২ এর অনুরূপ]

সূত্র ৪। $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$

সূত্র ৫। $a, b \in R$ এবং $n \in N$ হলে, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

[সূত্রদ্বয় আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ কর]

শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক।

সংজ্ঞা : $a \in R,\ a \neq 0$ হলে,

(৩) $a^0 = 1$

(৪) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, যেখানে $n \in N$

মন্তব্য : সূচকের ধারণা সম্প্রসারণের সময় লক্ষ রাখা হয় যেন সূচকের মৌলিক সূত্র $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ সকল ক্ষেত্রেই বৈধ থাকে।

সূত্রটি যদি $m = 0$ এর জন্য সত্য হয়, তবে $a^o \cdot a^n = a^{o+n}$ অর্থাৎ, $a^o = \frac{a^n}{a^n} = 1$ হতে হবে।

একইভাবে, সূত্রটি যদি $m = -n \ (n \in N)$ এর জন্য সত্য হতে হয়,

তবে $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^o = 1$ অর্থাৎ, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ হতে হবে। এদিকে লক্ষ রেখেই উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

উদাহরণ ১। (ক) $2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$

(খ) $\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$

(গ) $\frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^{5-3}} = \frac{1}{3^2}$

(ঘ) $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5 \times 5 \times 5}{4 \times 4 \times 4} = \frac{5^3}{4^3}$

(ঙ) $(4^2)^7 = 4^{2 \times 7} = 4^{14}$

(চ) $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5 \cdot (b^3)^5 = a^{2 \times 5} \cdot b^{3 \times 5} = a^{10}b^{15}$

উদাহরণ ২। (ক) $6^o = 1$, (খ) $(-6)^o = 1$, (গ) $7^{-1} = \frac{1}{7}$.

(ঘ) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$, (ঙ) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0 \cdot 1$

(চ) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

উদাহরণ ৩। $m, n \in N$ হলে $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে নিয়ে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$ যেখানে $a \neq 0$ এবং $m \in N$ এবং $n \in Z$

সমাধান : (১) এখানে, $(a^m)^n = a^{mn}$..........(1)
যেখানে, $a \neq 0$ এবং $m \in N$ ও $n \in Z$
প্রথমে মনে করি, $n > 0$; এক্ষেত্রে (1) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

(২) এখন মনে করি, $n = 0$; এ ক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^o = a^o = 1$

$\therefore$ (1) সত্য।

(৩) সবশেষে মনে করি, $n < 0$ এবং $n = -k$, যেখানে $k \in N$

এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{m(-k)} = a^{mn}$.

উদাহরণ ৪। দেখাও যে, সকল $m, n \in N$ এর জন্য $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ যেখানে $a \neq 0$

সমাধান : $m > n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [সূত্র ৩]

$m < n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ [সূত্র ৩]

$\therefore \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{-(n-m)}$ [সূত্র ৪]

$= a^{m-n}$

$m = n$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0$ [সংজ্ঞা ৩]

$= a^{m-m} = a^{m-n}$

দ্রষ্টব্য : উপরে বর্ণিত সূচকের সংজ্ঞাগুলো থেকে যেকোনো $m \in Z$ এর জন্য a^m এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, যেখানে $a \neq 0$. সূচক ধনাত্মক অথবা শূন্য অথবা ঋণাত্মক ধরে সাধারণভাবে সকল পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য নিম্নোক্ত সূত্রটি প্রমাণ করা যায়।

সূত্র ৬। $a \neq 0$, $b \neq 0$ এবং $m, n \in Z$ হলে,

(ক) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (খ) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(গ) $(a^m)^n = a^{mn}$ (ঘ) $(ab)^n = a^n b^n$

(ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

কাজ :

১। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$ যেখানে $a \in R$ এবং $n \in N$

২। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a \cdot b)^n = a^n b^n$ যেখানে $a, b \in R$ এবং $n \in N$

৩। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$, যেখানে $a > 0$ এবং $n \in N$ ।

অতঃপর $(ab)^n = a^n b^n$ সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ যেখানে, $a, b \in R$, $b > 0$, এবং $n \in N$ ।

৪। মনে কর, $a \neq 0$, এবং $m, n \in Z$ ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ যখন (i) $m > 0$ এবং $n < 0$, (ii) $m < 0$ এবং $n < 0$ ।

৯·৩ মূল এর ব্যাখ্যা

সংজ্ঞা : $n \in N, n > 1$ এবং $a \in R$ হলে, যদি এমন $x \in R$ থাকে যেন $x^n = a$ হয়, তবে সেই x কে a এর একটি n তম মূল বলা হয়। 2 তম মূলকে বর্গমূল এবং 3 তম মূলকে ঘনমূল বলা হয়।

উদাহরণ ৫। (*i*) 2 এবং -2 উভয়ই 16-এর 4 তম মূল, কারণ $(2)^4 = 16$ এবং $(-2)^4 = 16$

(*ii*) -27 এর ঘনমূল -3, কারণ $(-3)^3 = -27$

(*iii*) 0 এর n তম মূল 0, কারণ সকল $0^n = 0$

(*iv*) -9 এর কোনো বর্গমূল নেই, কারণ যেকোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল অঋণাত্মক।

এখানে, উল্লেখ্য যে,

(ক) যদি $a > 0$ এবং $n \in N, n > 1$ হয়, তবে a-এর একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল আছে। এই ধনাত্মক মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয় ($\sqrt[2]{a}$ এর স্থলে $\sqrt{a}$ লেখা হয়) এবং একে a এর n তম মূল বলা হয়। n জোড় সংখ্যা হলে এরূপ a-এর অপর একটি n তম মূল আছে এবং তা হলো $\sqrt[n]{a}$ ।

(খ) যদি $a < 0$ এবং $n \in N, n > 1$ বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে a-এর একটি মাত্র n তম মূল আছে যা ঋণাত্মক ; এই মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। n জোড় হলে এবং a ঋণাত্মক হলে a-এর কোনো n তম মূল নেই।

(গ) 0 এর n তম মূল্য $\sqrt[n]{0} = 0$

দ্রষ্টব্য : (১) $a > 0$ হলে $\sqrt[n]{a} > 0$

(২) $a < 0$ এবং n বিজোড় হলে,

$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} < 0$ [যেখানে $|a|$ হচ্ছে a এর পরমমান]।

উদাহরণ ৬। $\sqrt{4} = 2, \left(\sqrt{4} \neq -2\right), \sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8}, \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ যখন } a > 0 \\ -a, \text{ যখন } a < 0 \end{cases}$

সূত্র ৭। $a < 0$ এবং $n \in N, n > 1, n$ বিজোড় হলে দেখাও যে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

প্রমাণ : মনে করি, $\sqrt[n]{|a|} = x$

তাহলে, $x^n = |a|$ [মূলের সংজ্ঞা]

বা, $x^n = -a$ [$|a|$ এর সংজ্ঞা]

বা, $-x^n = a$

বা, $(-x)^n = a$ [$\because n$ বিজোড়]

$\therefore \sqrt[n]{a} = -x$ [মূলের সংজ্ঞা]

সুতরাং $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$ কেননা a এর n তম মূল অনন্য।

উদাহরণ ৭। $-\sqrt[3]{27}$

সমাধান : $-\sqrt[3]{27}=-\sqrt[3]{(3)^3}=-3$

সূত্র ৮ : $a>0, m\in Z$ এবং $n\in N, n>1$ হলে, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

প্রমাণ : মনে করি, $\sqrt[n]{a}=x$ এবং $\sqrt[n]{a^m}=y$

তাহলে, $x^n=a$ এবং $y^n=a^m$

$\therefore\ y^n=a^m=(x^n)^m=(x^m)^n$

যেহেতু $y>0, x^m>0$, সুতরাং মুখ্য n তম

মূল বিবেচনা করে পাই, $y=x^m$

বা, $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

অর্থাৎ, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

সূত্র ৯। যদি $a>0$ এবং $\dfrac{m}{n}=\dfrac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p\in Z$ এবং $n,\ q\in N,\ n>1,\ q>1$

তবে, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[q]{a^p}$

প্রমাণ : এখানে $qm=pn.$

মনে করি, $\sqrt[n]{a^m}=x$ তাহলে, $x^n=a^m$

$\therefore\ (x^n)^q=(a^m)^q$

$\therefore\ x^{nq}=a^{mq}=a^{pn}$

বা, $(x^q)^n=(a^p)^n$

$\therefore\ x^q=a^p$ [মুখ্য n তম মূল বিবেচনা করে]

$\therefore\ x=\sqrt[q]{a^p}$

$\therefore\ \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[q]{a^p}$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $a>0$ এবং $n,k\in N,\ n>1$ হয়,

তবে, $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$

৯·৪ মূলদ ভগ্নাংশ সূচক :

সংজ্ঞা : $a\in R$ এবং $n\in N,\ n>1$ হলে, (ক) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ যখন $a>0$ অথবা $a<0$ এবং বিজোড়।

মন্তব্য ১ : সূচক নিয়ম $(a^m)^n=a^{mn}$ [সূত্র ৬ দ্রষ্টব্য]

যদি সকল ক্ষেত্রে সত্য হতে হয়, তবে $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$ হতে হবে, অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম মূল হতে হবে।

এ জন্য একাধিক মূলের ক্ষেত্রে দ্ব্যর্থতা পরিহারের লক্ষ্যে উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

মন্তব্য ২ : $a<0$ এবং $n\in N$, $n>1$ বিজোড় হলে সূত্র ৭ থেকে দেখা যায়

যে, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{|a|}=-|a|^{\frac{1}{n}}$

এরূপ ক্ষেত্রে এই সূত্রের সাহায্যেই $a^{\frac{1}{n}}$ এর মান নির্ণয় করা হয়।

মন্তব্য ৩ : a মূলদ সংখ্যা হলেও অধিকাংশ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ অমূলদ সংখ্যা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয়।

সংজ্ঞা : $a>0, m\in Z$ এবং $n\in N$, $n>1$ হলে, (৬) $a^{\frac{m}{n}}=a^{\left(\frac{1}{n}\right)^m}$

দ্রষ্টব্য ১ : সংজ্ঞা (৫) ও (৬) এবং সূত্র ৮ থেকে দেখা যায় যে, $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

যেখানে, $a>0$, $m\in Z$ এবং $n\in N, n>1$

সুতরাং $p\in Z$ এবং $q\in Z, n>1$ যদি এমন হয় যে, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ হয়, তবে সূত্র ৯ থেকে দেখা যায় যে,

$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{p}{q}}$

দ্রষ্টব্য ২ : পূর্ণসাংখ্যিক সূচক মূলদ ভগ্নাংশ সূচকের সংজ্ঞা থেকে a^r এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, যেখানে $a>0$ এবং $r\in Q$। উপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, $a>0$ হলে, r কে বিভিন্ন সমতুল ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা হলেও a^r এর মানের কোনো তারতম্য হয় না।

দ্রষ্টব্য ৩ : সূত্র ৬ এ বর্ণিত সূচক নিয়মগুলো সাধারণভাবে যেকোনো সূচকের জন্য সত্য হয়।

সূত্র ১০। $a>0, b>0$ এবং $r, s\in Q$ হলে

(ক) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$ (খ) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

(গ) $\left(a^r\right)^s=a^{rs}$ (ঘ) $(ab)^r=a^rb^r$

(ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$

(ক) ও (ঘ) এর পুনঃপুন প্রয়োগের মাধ্যমে দেখা যায় যে,

অনুসিদ্ধান্ত : (১) $a>0$ এবং $r_1, r_2..........r_k\in Q$ হলে,
$a^{r_1}\cdot a^{r_2}\cdot a^{r_3}..........a^{r_k}=a^{r_1+r_2+r_3+......+r_k}$

(২) $a_1>0, a_2>0....., a_n>0$ এবং $r\in Q$ হলে, $(a_1\cdot a_2.......a_n)^r=a_1^r\cdot a_2^r.......a_n^r$.

উদাহরণ ৭। দেখাও যে, $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
যেখানে, $a>0; m, p\in Z; n, q\in N, n>1, q>1$.

সমাধান : $\dfrac{m}{n}$ ও $\dfrac{p}{q}$ কে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করে দেখা যায় যে,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np} \quad \text{[সংজ্ঞা ৬ ব্যবহার করে]}$$

$$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} \quad \text{[সূত্র ৬]}$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} \quad \text{[সংজ্ঞা ৬]}$$

$$= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}}$$

$$= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় তথ্য :

(i) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = 0$

(ii) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $x \neq 0$ তাহলে $a = 1$

(iii) যদি $a^x = a^y$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = y$

(iv) যদি $a^x = b^x$ হয়, যেখানে $\dfrac{a}{b} > 0$ এবং $x \neq 0$ তাহলে $a = b$

উদাহরণ ৮ । সরল কর :

যদি $a^x = b, b^y = c$ এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$.

সমধান : (i) প্রদত্ত শর্ত হতে, $b = a^x$, $c = b^y$ এবং $a = c^z$

এখন, $b = a^x = (c^z)^x = c^{zx} = (b^y)^{zx} = b^{xyz}$

$\Rightarrow b = b^{xyz} \Rightarrow b^1 = b^{xyz}$

$\therefore$ $xyz = 1$. (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ৯ । যদি $a^b = b^a$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ এবং এ থেকে প্রমাণ কর যে, $a = 2b$ হলে, $b = 2$

সমাধান : দেওয়া আছে $a^b = b^a$

$\therefore$ $b = (a^b)^{\frac{1}{a}} = a^{\frac{b}{a}}$

বামপক্ষ $= \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{a^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(a^1 \cdot a^{-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{a}{b}}$

$= a^{\frac{a}{b}} \cdot a^{-1} = a^{\frac{a}{b}-1}$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

পুনরায়, $a = 2b$ হলে

$$\left(\frac{2b}{b}\right)^{\frac{2b}{b}} = (2b)^{\frac{2b}{b}-1} \Rightarrow (2)^2 = (2b)^{2-1}$$

$\Rightarrow 4 = 2b \qquad \therefore\ b = 2$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ১০। যদি $x^{x\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x}\right)^x$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে $x^{x\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x}\right)^x$

$$\Rightarrow\ (x^x)^{\sqrt{x}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^x$$

$$= \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^x = \left(x^x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ \left(x^x\right)^{\sqrt{x}} = \left(x^x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{x} = \frac{3}{2} \qquad \therefore\ x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

উদাহরণ ১১। যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y}$

সমাধান : যেহেতু $a^x = b^y$

বা, $a = b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y \quad \therefore\ c = b^{\frac{y}{z}}$

এখন $b^2 = ac$

$$\therefore\ b^2 = b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$$

$\Rightarrow\ 2 = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{z} \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ১২। প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$

$= (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \times (x^{a-b})^{a-b}$

$= x^{b^2-c^2} \times x^{c^2-a^2} \times x^{a^2-b^2}$

$= x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}$

$= x^0$

$= 1 =$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ ১৩। যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $x+y+z=0$

সমাধান : ধরি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k.$

তাহলে পাই, $a = k^x, b = k^y, c = k^z$

$\therefore\ abc = k^x k^y k^z = k^{x+y+z}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

$\therefore\ k^{x+y+z} = k^0$

$\therefore\ x+y+z=0$

উদাহরণ ১৪। সরল কর : $\dfrac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}} + \dfrac{1}{1+z^{z-x}+a^{z-y}} + \dfrac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$

এখানে, $\dfrac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}} = \dfrac{a^{-y}}{a^{-y}(1+a^{y-z}+a^{y-x})} = \dfrac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}}$

একইভাবে, $\dfrac{1}{1+z^{z-x}+a^{z-x}} = \dfrac{a^{-z}}{a^{-z}(1+a^{z-x}+a^{z-y})} = \dfrac{a^{-z}}{a^{-z}+a^{-x}+a^{-y}}$

এবং $\dfrac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}} = \dfrac{a^{-x}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $\dfrac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}} + \dfrac{1}{1+z^{z-x}+a^{z-y}} + \dfrac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$

$= \dfrac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}} + \dfrac{a^{-z}}{a^{-z}+a^{-x}+a^{-y}} + \dfrac{a^{-x}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$

$= \dfrac{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}} = 1$

উদাহরণ ১৫। যদি $a = 2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3-6a^2+6a-2=0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a = 2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ a-2 = 2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a-2)^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

$$= 2^2 + 2 + 3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= 6 + 6(a-2)\left[\because 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = a-2\right]$$

বা, $a^3 - 3a^2 2 + 3a\cdot 2^2 - 2^3 = 6 + 6a - 12$

বা, $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 6 + 6a - 12$

বা, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$

উদাহরণ ১৬। সমাধান কর : $4^x - 3\cdot 2^{x+2}\cdot + 2^5 = 0$

সমাধান : $4^x - 3\cdot 2^{x+2} + 2^5 = 0$

$\Rightarrow (2^2)^x - 3\cdot 2^x\cdot 2^2 + 2^5 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 12\cdot 2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 12y + 32 = 0$ [মনে করি $2^x = y$]

$\Rightarrow y^2 - 4y - 8y + 32 = 0$

$\Rightarrow y(y-4) - 8(y-4) = 0$

$\Rightarrow (y-4)(y-8) = 0$

$\therefore y - 4 = 0$

$\Rightarrow 2^x - 4 = 0$ [$\because 2^x = y$]

$\Rightarrow 2^x = 4 = 2^2$

$\therefore x = 2$

অথবা $y - 8 = 0$

$\Rightarrow 2^x - 8 = 0$ [$\because 2^x = y$]

$\Rightarrow 2^x = 8 = 2^3$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2, 3$

কাজ :

১। মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{5^{n+2} + 35\times 5^{n-1}}{4\times 5^n}$ (ii) $\dfrac{3^4\cdot 3^8}{3^{14}}$

২। দেখাও যে, $\left(\dfrac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$

৩। যদি $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1$

৪। সমাধান কর : (i) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

(ii) $9^{2x} = 3^{x+1}$

(iii) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320$

৫। সরল কর : (i) $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}}$.

(ii) $\left[1-1\left\{1-(1-x^3)^{-1}\right\}^{-1}\right]^{-1}$.

৬। যদি $\sqrt[x]{a}=\sqrt[y]{b}=\sqrt[z]{c}$ এবং $abc=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর $x+y+z=0$.

৭। যদি $a^m\cdot a^n=(a^m)^n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m(n-2)+n(m-2)=0$.

অনুশীলনী ৯.১

১। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=a^{\frac{mp}{n}}$ যেখানে m, $p\in Z$ এবং $n\in N$.

২। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$ যেখানে $m,n\in Z$, $m\neq o, n\neq o$

৩। প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}$, যেখানে $m\in Z$, $n\in N$

৪। দেখাও যে, (ক) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a-b$

(খ) $\dfrac{a^3+a^{-3}+1}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+1}=\left(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-1\right)$

৫। সরল কর :

(ক) $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ (খ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

(গ) $\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\dfrac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

(ঘ) $\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\dfrac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\dfrac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

(ঙ) $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\times\sqrt[ca]{\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\times\sqrt[ab]{\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$ (চ) $\dfrac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$

৬। দেখাও যে,

(ক) যদি $x = a^{q+r}b^{p}, y = a^{r+p}\, b^{q}, z = a^{p+q}b^{r}$ হয়, তবে $x^{q-r} \cdot y^{r-p} \cdot z^{p-q} = 1$.

(খ) যদি $a^{p} = b, b^{q} = c$ এবং $c^{r} = a$ হয়, তবে $pqr = 1$.

(গ) যদি $a^{x} = p, a^{y} = q$ এবং $a^{2} = (p^{y}q^{x})^{z}$ হয়, তবে $xyz = 1$.

৭। (ক) যদি $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^{2} = bc$ হয়, তবে দেখাও যে, $ax^{3} + by^{3} + cz^{3} = 3axyz$.

(খ) যদি $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^{2} - b^{2} = c^{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^{3} - 3cx - 2a = 0$

(গ) যদি $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^{3} - 6a = 5$

(ঘ) যদি $a^{2} + 2 = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a \geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^{3} + 9a = 8$

(ঙ) যদি $a^{2} = b^{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

(চ) যদি $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^{3} - 3b^{2} - 6b - 4 = 0$

(ছ) যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{x^{b} + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^{c} + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^{a} + x^{-b} + 1} = 1.$$

৮। (ক) যদি $a^{x} = b, b^{y} = c$ এবং $c^{z} = 1$ হয়, তবে $xyz =$কত ?

(খ) যদি $x^{a} = y^{b} = z^{c}$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab + bc + ca =$ কত ?

(গ) যদি $9^{x} = (27)^{y}$ হয়, তা হলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত ?

৯। সমাধান কর :

(ক) $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

(খ) $5^{x} + 3^{y} = 8$

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$

(গ) $4^{3x-2} = 16^{x+y}$

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$

(ঘ) $2^{2x+1} \cdot 2^{3y+1} = 8$

$2^{x+2} \cdot 2^{y+2} = 16$

৯·৬ লগারিদম (*Logarithm*)

Logos এবং *arithmas* নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে লগারিম শব্দটির উৎপত্তি। *Logos* অর্থ আলোচনা এবং *arithmas* অর্থ সংখ্যা অর্থাৎ, বিশেষ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা।

সংজ্ঞা : যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0, b > 0$ এবং $a \neq 1$, তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ, $x = \log_a b$

অতএব, $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

বিপরীতক্রমে, যদি $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$ হবে।

এক্ষেত্রে b সংখ্যাটিকে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে x এর প্রতিলগ $(anti - \log arithm)$ বলে

এবং আমরা লিখি $b = anti \log_a x$

যদি $\log a = n$ হয়, তবে a কে n এর প্রতিলগ বলা হয় অর্থাৎ, $\log a = n$ হলে $a = anti \log n.$

উদাহরণ ১। $anti \log\ 2 \cdot 82679 = 674.1042668$

$anti \log(9 \cdot 82672 - 10) = 0 \cdot 671$

এবং $anti \log(6 \cdot 74429 - 10) = 0 \cdot 000555$

দ্রষ্টব্য : বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\log a$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করা যায় (এ সম্পর্কে মাধ্যমিক বীজগণিতে বিস্তারিত বর্ণনা দেওয়া আছে)।

সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই,

$\log_2 64 = 6$ যেহেতু $2^6 = 64$ এবং $\log_8 64 = 2$ যেহেতু $8^2 = 64$

সুতরাং, একই সংখ্যার লগারিদম ভিন্ন ভিন্ন ভিত্তির প্রেক্ষিতে ভিন্ন হতে পারে। ধনাত্মক কিন্তু এককের সমান নয় এমন যেকোনো সংখ্যাকে ভিত্তি ধরে একই সংখ্যার ভিন্ন ভিন্ন লগারিদম নির্ণয় করা যায়। যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যাকে লগারিদমের ভিত্তি হিসাবে গণ্য করা হয়। কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম এর বাস্তব মান নির্ণয় করা যায় না।

$Note$: $a > 0$ ও $a > 1$ এবং $b \neq 0$ হলে b এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $\log_a b$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং (ক) $\log_a b = x$ যদি ও কেবল যদি $a^x = b$ হয়। (ক) থেকে দেখা যায় যে,

(খ) $\log_a (a^x) = x$ (গ) $a^{\log_a b} = b$

উদাহরণ ১। (১) $4^2 = 16 \Rightarrow \log_4 16 = 2$

(২) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow \log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$

(৩) $10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10}(1000) = 3$

(৪) $7^{\log_7 9} = 9\ [\therefore\ a^{\log_a b} = b]$

(৫) $18 = \log_2 2^{18}\quad [\because \log_a a^x = x]$

৯·৭ লগারিদমের সূত্রাবলি : (মাধ্যমিক বীজগণিতে প্রমাণ দেওয়া হয়েছে বিধায় এখানে শুধু সূত্রগুলো দেখানো হলো।)

১। $\log_a a = 1$ এবং $\log_a 1 = 0$

২. $\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N$

৩. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

৪. $\log_a(M)^N=N\ \log_a M$

৫. $\log_a M=\log_b M\times\log_a b$

উদাহরণ ২। $\log_2 5+\log_2 7+\log_2 3=\log_2(5.7.3)=\log_2 105$

উদাহরণ ৩। $\log_3 20-\log_3 5=\log_3\frac{20}{5}=\log_3 4$

উদাহরণ ৪। $\log_5 64=\log_5 2^6=6\log_5 2$

Note: (*i*) যদি $x>0,\ y>0$ এবং $a\neq 1$ হয়, তবে $x=y$ যদি এবং কেবল যদি $\log_a x=\log_a y$

(*ii*) যদি $a>1$ এবং $x>1$ হয় তবে $\log_a x>0$

(*iii*) যদি $0<a<1$ এবং $0<x<1$ হয়, তবে $\log_a x>0$

(*iv*) যদি $a>1$ এবং $0<x<1$ হয়, তবে $\log_a x<0$

উদাহরণ ৫। x এর মান নির্ণয় কর:

(*i*) $\log_{\sqrt{8}} x=3\frac{1}{3}$

(*ii*) $\log_{10}[98+\sqrt{x^2-12x+36}]=2$

সমাধান : (*i*) যেহেতু $\log_{\sqrt{8}} x=3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

$\therefore\ x=(\sqrt{8})^{\frac{10}{3}}=\left(\sqrt{2^3}\right)^{\frac{10}{3}}$

$\Rightarrow x=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}}=2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}}=2^5=32$

$\therefore\ x=32$

(*ii*) যেহেতু $\log_{10}[98+\sqrt{x^2-12x+36}]=2$

$\therefore\ 98+\sqrt{x^2-12x+36}=10^2=100$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-12x+36}=2$

$\Rightarrow x^2-12x+36=4$

$\Rightarrow (x-4)(x-8)=0$

$\therefore\ x=4$ বা $x=8.$

উদাহরণ ৬। দেখাও যে, $a^{\log_k b-\log_k c}\times b^{\log_k c-\log_k a}\times c^{\log_k a-\log_k b}=1.$

সমাধান : ধরি, $P=a^{\log_k b-\log_k c}\times b^{\log_k c-\log_k a}\times c^{\log_k a-\log_k b}$

তাহলে, $\log_k p=(\log_k b-\log_k c)\log_k a+(\log_k c-\log_k a)\log_k b+(\log_k a-\log_k b)\log_k c.$

$\Rightarrow \log_k p=0$ [সরল করে]

$\Rightarrow P=k^0=1$

উদাহরণ ৭। দেখাও যে, $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$

প্রমাণ : ধরি $p=\log_a y, q=\log_a x$

সুতরাং $a^p=y, a^q=x$

$\therefore\ (a^p)^q=y^q\Rightarrow y^q=a^{pq}$

এবং $(a^q)^p=x^p\Rightarrow x^p=a^{pq}$

$\therefore\ x^p=y^q\Rightarrow\ x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$

উদাহরণ ৮। দেখাও যে, $\log_a p\times\log_p q\times\log_q r\times\log_r b=\log_a b$

বামপক্ষ $=\log_a p\times\log_p q\times\log_q r\times\log_r b$

$=(\log_p q\times\log_a p)\times(\log_r b\times\log_q r)$

$=\log_a q\times\log_q b=\log_a b=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ ৯। দেখাও যে, $\dfrac{1}{\log_a(abc)}+\dfrac{1}{\log_b(abc)}+\dfrac{1}{\log_c(abc)}=1$

সমাধান : ধরি, $\log_a(abc)=x, \log_b(abc)=y, \log_c(abc)=z$

সুতরাং, $a^x=abc, b^y=abc, c^z=abc$

$\therefore\ a=(abc)^{\frac{1}{x}}, b=(abc)^{\frac{1}{y}}, c=(abc)^{\frac{1}{z}}$

এখন, $(abc)^1=abc=(abc)^{\frac{1}{x}}(abc)^{\frac{1}{y}}(abc)^{\frac{1}{z}}$

$=(abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

অর্থাৎ, $\dfrac{1}{\log_a(abc)}+\dfrac{1}{\log_b(abc)}+\dfrac{1}{\log_c(abc)}=1$

উদাহরণ ১০। যদি $P=\log_a(bc), q=\log_b(ca), r=\log_c(ab)$ হয়

তবে দেখাও যে, $\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{q+1}+\dfrac{1}{r+1}=1.$

সমাধান : $1+P=1+\log_a(bc)=\log_a a+\log_a(bc)=\log_a(abc)$

একইভাবে, $1+q=\log_b(abc),\ 1+r=\log_c(abc)$

উদাহরণ (৯) এ আমরা প্রমাণ করেছি, $\dfrac{1}{\log_a(abc)}+\dfrac{1}{\log_b(abc)}+\dfrac{1}{\log_c(abc)}=1$

$\therefore\ \dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{q+1}+\dfrac{1}{r+1}=1.$

উদাহরণ ১১। যদি $\dfrac{\log a}{y-z}=\dfrac{\log b}{z-x}=\dfrac{\log c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^x b^y c^z=1$

সমাধান : ধরি, $\dfrac{\log a}{y-z}=\dfrac{\log b}{z-x}=\dfrac{\log c}{x-y}=k$

তাহলে, $\log a=k(y-z), \log b=k(z-x), \log c=k(x-y)$

$\therefore\ x\log a+y\log b+z\log c=k(xy-zx+yz-xy+zx-yz)=0$

বা, $\log_a a^x+\log_a b^y+\log_a c^z=0$

বা, $\log(a^x b^y c^z)=0$

বা, $\log(a^x b^y c^z)=\log 1 \quad [\log 1=0]$

$\therefore\ a^x b^y c^z=1$

কাজ :

১। যদি $\dfrac{\log a}{b-c}=\dfrac{\log b}{c-a}=\dfrac{\log c}{a-b}$ হয়, তাহলে $a^a\, b^b . c^c$ এর মান নির্ণয় কর।

২। যদি a, b, c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে. $\log(1+ac)=2\log b$

৩। যদি $a^2+b^2=7ab$ হয়, তবে দেখাও যে, $\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\log(ab)=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$

৪। যদি $\log\left(\dfrac{x+y}{3}\right)=\dfrac{1}{2}(\log x+\log y)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=7$

৫। যদি $x=1+\log_a bc, y=1+\log_b ca$ এবং $z=1+\log_c ab$ হয়,

তবে প্রমাণ কর যে, $xyz=xy+yz+zx$

৬। (ক) যদি $2\log_8 A = p$, $2\log_2 2A = q$ এবং $q - p = 4$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর।

(খ) যদি $\log x^y = 6$ এবং $\log 14x^{8y} = 3$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

৭। লগ সারণি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য) ব্যবহার করে P এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যেখানে,

(ক) $P = (0.087721)^4$

(খ) $P = \sqrt[3]{30\cdot00618}$

৯·৭ সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশন

প্রথম অধ্যায়ে আমরা ফাংশন সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছি। এখানে সূচক, লগারিদম ও পরমমান ফাংশন সম্পর্কে আলোচনা করা হলো :

নিচের তিনটি টেবিলে বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো লক্ষ করি :

টেবিল ১ :

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-2	0	2	4	6

টেবিল ২ :

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	9	27	81	243

টেবিল ৩ :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

টেবিল ১ এ বর্ণিত x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য y এর মানগুলোর অন্তর সমান যা দ্বারা সরলরেখার ফাংশন বর্ণিত হয়েছে।

টেবিল ২ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো দ্বারা দ্বিঘাত ফাংশন বর্ণিত হয়েছে।

টেবিল ৩ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমোজোড়ের মানগুলো $y = 2^x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়। এখানে 2 একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য y এর বর্ণিত মানগুলো পাওয়া যায় যা নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সূচক ফাংশন $f(x) = a^x$ সকল বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য সংজ্ঞায়িত, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$

যেমন $y = 2^x, 10^x, e^x$ ইত্যাদি সূচক ফাংশন।

কাজ :

নিচের ছকে বর্ণিত সূচক ফাংশন লেখ :

১।	x	-2	-1	0	1	2
	y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

২।	x	-1	0	1	2	3
	y	-3	0	3	6	9

৩।	x	1	2	3	4	5
	y	4	16	64	256	1024

৪।	x	-3	-2	-1	0	1
	y	0	1	2	3	4

৫।	x	-2	-1	0	1	2
	y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

৬।	x	1	2	3	4	5
	y	5	10	15	20	25

নিচের কোনটি সূচক ফাংশন নির্দেশ করে :

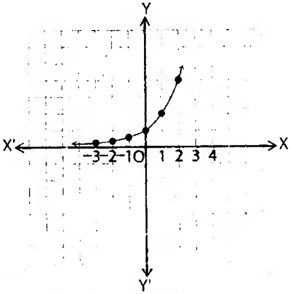
৭। $y = -3^x$ ৮। $y = 3x$ ৯। $y = -2x - 3$ ১০। $y = 5\_x$

১১। $y = x^2 + 1$ ১২। $y = 3x^2$

$f(x) = 2^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন :

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-

এখানে ডোমেন $= (-\infty, \infty)$

রেঞ্জ $= (0, \infty)$

চিত্র থেকে লক্ষ করলে দেখা যায়, যখন $x = 0$ তখন $y = 2^0 = 1$ কাজেই রেখাটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী

আবার, x এর ঋণাত্মক যেকোনো মানের জন্য y এর মান কখনও 0 (শূন্যের) খুবই কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু কখনও শূন্যে (0) হয় না অর্থাৎ, $x \longrightarrow -\infty$, $y \longrightarrow 0^+$

একইভাবে, x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে ডানদিকে (উপরে) বৃদ্ধি পেতে থাকবে অর্থাৎ, $-\infty$ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ, $x \longrightarrow -\infty$, $y \longrightarrow \infty$

সুতরাং ডোমেন $(D) = (-\infty, \infty)$

এবং রেঞ্জ $(R) = (0, \infty)$

কাজ : লেখচিত্র অঙ্কন কর যেখানে $-3 \leq x \leq 3$

১। $y = 2^{-x}$ ২। $y = 4^x$ ৩। $y = 2^{\frac{x}{2}}$ ৪। $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

যেহেতু সূচক ফাংশন একটি এক-এক ফাংশন,

সুতরাং, এর বিপরীত ফাংশন আছে।

$f(x) =$ $y = a^x$ সূচকীয় রূপ

$f^{-1}(y) =$ $x = a^y$ x এবং y পরিবর্তন করে

অর্থাৎ, x হলো y এর a ভিত্তিক লগারিদম।

সংজ্ঞা : লগারিদমিক ফাংশন $f(x) = \log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$

$f(x) = \log_3 x,\ Inx,\ \log_{10} x$ ইত্যাদি লগারিদমিক ফাংশন।

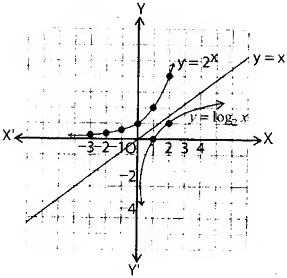
$y = \log_2 x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন :

যেহেতু $y = \log_2 x$ হলো $y = 2^x$ এর বিপরীত।

$y = x$ রেখা সাপেক্ষে সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে যা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সদৃশ।

এখন ডোমেন $R = (0, \infty)$

রেঞ্জ $(D) = (-\infty, \infty)$



কাজ : লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এদের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর:

১। $y = 3x + 2$ ২। $y = x^2 + 3$ ৩। $y = x^3 - 1$ ৪। $y = \dfrac{4}{x}$

৫। $y = 3x$ ৬। $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ৭। $y = 2^{-x}$ ৮। $y = 4^x$

উদাহরণ ১। $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $f(0) = \dfrac{0}{|0|} = \dfrac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান নয়।

শূন্য ব্যতীত x এর অন্য সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = R - \{0\}$

আবার, $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} & \text{যখন } x > 0 \\ \dfrac{x}{-x} & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \{-1, 1\}$

উদাহরণ ২। $y = f(x) = In\dfrac{a+x}{a-x}, a > 0$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ $\dfrac{a+x}{a-x} > 0$ যদি (*i*) $a + x > 0$ এবং $a - x > 0$ হয়

অথবা (*ii*) $a + x < 0$ এবং $a - x < 0$ হয়।

$(i) \Rightarrow x > -a$ এবং $a > x$

$\Rightarrow -a < x$ এবং $x < a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -a < x\} \cap \{x : x > a\}$

$= (-a, \infty) \cap (a, \infty) = (-a, a)$

$(ii) \Rightarrow x < -a$ এবং $a < x$

$\Rightarrow x < -a$ এবং $x > a$

$\therefore$ ডোমেন $\{x : x < -a\} \cap \{x : x > a\} = \Phi.$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$\therefore D_f = (i)$ ও (ii) ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $(-a, a) \cup \Phi = (-a, a)$

রেঞ্জ : $y = f(x) = n \dfrac{a+x}{a-x} \Rightarrow e^y = \dfrac{a+x}{a-x}$

$\Rightarrow a + x = ae^y - xe^y$

$\Rightarrow (1 + e^y)\, x = a(xe^y - 1)$

$\Rightarrow x = \dfrac{a\,(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

কাজ :

নিচের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর :

১। $y = ln\dfrac{2+x}{2-x}$ ২। $y = ln\dfrac{3+x}{3-x}$ ৩। $y = ln\dfrac{4+x}{4-x}$ ৪। $y = ln\dfrac{5+x}{5-x}$

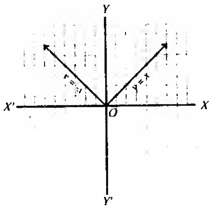
পরমমান (Absolute Value)

মাধ্যমিক বীজগণিতে এ সম্পর্কিত বিস্তারিত বর্ণনা করা হয়েছে। এখানে শুধু পরমমানের সংজ্ঞা দেওয়া হলো :

যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক। কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক। x এর পরমমানকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পরমমান নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$|x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

যেমন : $|0| = 0, |3| = 3, |-3| = -(-3) = 3$



পরমমান ফাংশন (*Absolute Value Function*)

যদি $x \in R$ হয়, তবে–

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

কে পরমমান ফাংশন বলা হয়।

$\therefore$ ডোমেন $= R$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty]$

উদাহরণ ৩। $f(x) = e^{\frac{|x|}{2}}$ যখন $-1 < x < 0$, এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর :

সমাধান : $f(x) = e^{\frac{-|x|}{2}}, -1 < x < 0$

x এর মান যেহেতু নির্দিষ্ট -1 থেকে 0 এর মধ্যে

সুতরাং ডোমেন $D_f = (-1,0)$

আবার, $-1 < x < 0$ ব্যবধিতে $f(x) \in \left(e^{\frac{-1}{2}}, 1\right)$

সুতরাং রেঞ্জ $f = \left(e^{\frac{-1}{2}}, 1\right)$

৯.৮ ফাংশনের লেখচিত্র (Graph of functions)

কোনো সমতলে কোনো ফাংশনকে জ্যামিতিকভাবে উপস্থাপন করা গেলে ঐ ফাংশনকে চেনা যায়। ফাংশনের জ্যামিতিকভাবে এই উপস্থাপনকে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়েছে বলা হয়। এখানে সূচক, লগারিদমিক ও পরমমান ফাংশনের লেখচিত্রের অঙ্কন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হলো।

(1) $y = f(x) = a^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর :

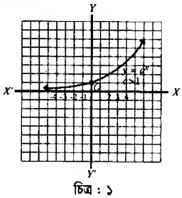
(i) যখন $a > 1$ এবং x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা তখন ফাংশন $f(x) = a^x$ সর্বদা ধনাত্মক।

ধাপ ১ : x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মান বৃদ্ধি পায়

ধাপ ২ : যখন $x = 0$ তখন $y = a^0 = 1$,

সুতরাং, $(0, 1)$ রেখার ওপর একটি বিন্দু।

ধাপ ৩ : x এর ঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মান ক্রমাগত হ্রাস পাবে। অর্থাৎ, $x \to \infty$ হলে $y \to 0$ হবে।



চিত্র : ১

এখন চিত্রে $y = a^x, a > 1$ ফাংশনের চিত্র ১ এ দেখানো হলো :

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$

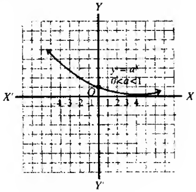
(ii) যখন $o < a < 1, x$ এর মান বাস্তব তখন $y = f(x) = a^x$ সর্বদাই ধনাত্মক।

ধাপ ১ : লক্ষ করি, মূল বিন্দুর ডানদিকে x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকলে অর্থাৎ, $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ হবে।

ধাপ ২ : যখন $x = 0$ তখন $y = a^0 = 1$

সুতরাং $(0,1)$ বিন্দু রেখার ওপর পড়ে।

ধাপ ৩ : যখন $a<1$ এবং x এর ঋণাত্মক মানের জন্য অর্থাৎ x এর মান মূল বিন্দুর বামদিকে ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ $y \to \infty$.



ধরি $a=\frac{1}{2}<1, x=-2,-3,......n,$ তখন $y=f(x)=a^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$=2^2, y=2^3,......., y^n=z^n$. যদি $n\to\infty$ তখন $y\to\infty$]

এখন $y=f(x)=a^x$, $0<a<1$ এর লেখচিত্র চিত্র ২ দেখানো হলো :

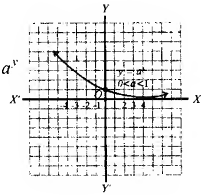
এখানে $D_f=(-\infty,\infty)$ এবং $R_f=(0,\infty)$

কাজ :
নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর :

(*i*) $f(x)=2^x$ (*ii*) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (*iii*) $f(x)=e^x$, $2<e<3$.

(*iv*) $f(x)=e^{-x}$, $2<e<3$. (*v*) $f(x)=3^x$

2. $f(x)=$ a^x এর লেখচিত্র অঙ্কন কর :



(*i*) ধরি, $y=f(x)=\log_a x$ যখন $0<a<1$ ফাংশনটিকে লেখা যায় $x=a^y$

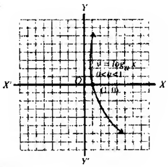
ধাপ ১ : যখন y এর ধনাত্মক মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে অর্থাৎ, $y\to\infty$ হয় তখন x এর মান শূন্যের দিকে ধাবিত হয় অর্থাৎ, $x\to 0$

ধাপ ২ : যেহেতু $a^o=1$ কাজেই $y=\log_a 1=0,$

সুতরাং রেখাটি $(1,0)$ বিন্দুগামী।

ধাপ ৩ : y এর ঋণাত্মক মান অর্থাৎ, y এর মান মূলবিন্দুর নিচের দিকে ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে অর্থাৎ, $y\to-\infty$ হয় তাহলে x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে অর্থাৎ, $x\to\infty$

এখন চিত্র ৩ এ $y=\log_a x$, $0<a<1$ দেখানো হলো :



(2) $y=\log_a x, a>1.$

এখানে $D_f=(0,\infty)$ এবং $R_f=(-\infty,\infty)$

যখন $y=\log_a x, a>1$, তখন

ধাপ ১ : যখন $a>1$, y এর সকল মানের জন্য x এর মান ধনাত্মক এবং y এর মানের ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে x এর মান বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ, $y\to\infty$ হলে $x\to\infty$

ধাপ ২ : যেহেতু $a^o=1$ কাজেই $y=\log_a 1=0$

সুতরাং, রেখাটি $(1,0)$ বিন্দুগামী।

ধাপ ৩ : y এর ঋণাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমাগত হ্রাস পেলে অর্থাৎ, $y=-\infty$ হলে x এর মান ক্রমাগত শূন্যের দিকে ধাবিত হয় অর্থাৎ, $x\to 0$

এখন $f(x) = \log a^x, a > 1$ এর লেখচিত্র চিত্র ৪ এ দেখানো হলো :

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$

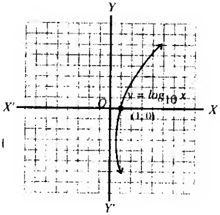
উদাহরণ ৩। $f(x) = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : ধরি $y = f(x) = \log_{10} x$

যেহেতু $10^o = 1$ কাজেই $y = \log_{10} 1 = 0$ সুতরাং, রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী।

যখন $x \to 0$ তখন $y \to -\infty$।

$\therefore$ $y = \log_{10} x$ রেখাটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত। নিচে রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।



এখানে $D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$

উদাহরণ ৪। $f(x) = lnx$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : ধরি, $y = f(x) = lnx$

যেহেতু $e^o = 1$ কাজেই $y = ln1 = 0$. সুতরাং, রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী।

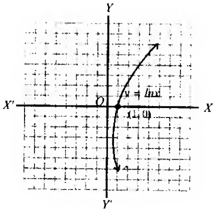
যখন $x \to 0$ তখন $y = ln0 = -\infty$

$\therefore$ $y = lnx$ রেখাটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

নিচে রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো :

এখানে $D_f = (0, \infty)$

$R_f = (-\infty, \infty)$



$\therefore$ $f(x) = lnx$ এর লেখচিত্র চিত্র ৬ এ দেখানো হলো :

কাজ :

১। টেবিলে উল্লেখিত x ও y এর মান নিয়ে $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

x	.5	1	2	3	4	5	10	12
y	−.3	0	0.3	0.5	.0	.7	1	1.0

২। $y = \log_e x$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ১এর ন্যায় x ও y এর মান নিয়ে টেবিল তৈরি কর এবং লেখচিত্র আঁক।

অনুশীলনী ৯.২

১। $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}}$ এর সরলমান কোনটি ?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) a (ঘ) x

২। যদি $a, b, p > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে

i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$

ii. $\log_a \sqrt{a} \times \log_b \sqrt{b} \times \log_c \sqrt{c}$ এর মান 2

iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন $x, y, z \neq 0$ এবং $a^x = b^y = c^z$

৩। কোনটি সঠিক ?

(ক) $a = b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $c^{\frac{z}{y}}$ (গ) $a = c^{\frac{z}{x}}$ (ঘ) $a \neq \dfrac{b^2}{c}$

৪। নিচের কোনটি ac এর সমান।

(ক) $b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{z}{y}}$ (গ) $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$ (ঘ) $b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$

৫। $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$ (খ) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{z}$ (গ) $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{x}$ (ঘ) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{z}{2}$

৬। দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\dfrac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\dfrac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\dfrac{c^n}{a^n}\right)=0$

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\dfrac{a}{b}\right)+\log_k(bc)\log_k\left(\dfrac{b}{c}\right)+\log_k(ca)\log_k\left(\dfrac{c}{a}\right)=0$

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

(ঘ) $\log_a \log_a \log_a\left(a^{a^{a^b}}\right)=b$

৭। (ক) যদি $\dfrac{\log_k a}{b-c}=\dfrac{\log_k b}{c-a}=\dfrac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a b^b c^c = 1$

(খ) যদি $\dfrac{\log_k a}{y-z}=\dfrac{\log_k b}{z-x}=\dfrac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(১) $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$

(২) $a^{y^2+yz+z^2} \cdot b^{z^2+zx+x^2} \cdot c^{x^2+xy+y^2} = 1.$

(গ) যদি $\dfrac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ঘ) দেখাও যে, $\log_k = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

(ঙ) যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\log_k\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log_k a$

(চ) যদি $xy^{a-1} = P,\ xy^{b-1} = q,\ xy^{c-1} = r$ হয়,

তবে দেখাও যে, $(b-c)\log_k p+(c-a)\log_k q+(a-b)\log_k r=0$

(ছ) যদি $\dfrac{ab\log_k(ab)}{a+b}=\dfrac{bc\log_k(bc)}{b+c}=\dfrac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a=b^b=c^c$

(জ) যদি $\dfrac{x(y+z-x)}{\log_k x}=\dfrac{y(z+x-y)}{\log_k y}=\dfrac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়,

তবে দেখাও যে, $x^y y^x=y^z z^y=z^x x^z$

৮। 'লগ সারণি (মাধ্যমিক বীজগণিত দ্রষ্টব্য) ব্যবহার করে P এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যেখানে,

(ক) $P=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ যেখানে $\pi\approx 3\cdot 1416, g=981$ এবং $l=25\cdot 5$

(খ) $P=10000\times e^{005t}$ যেখানে $e=1\cdot 718$ এবং $t=13\cdot 86$

৯। $\ln P\approx 2\cdot 3026\times\log P$ সূত্র ব্যবহার করে $\ln P$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর, যখন-

(ক) $P=10000$ (খ) $P=\cdot 001e^2$ (গ) $P=10^{100}\times\sqrt{e}$

১০। লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(ক) $y=3^x$ (খ) $y=-3^x$ (গ) $y=3^{x+1}$ (ঘ) $y=-3^{x+1}$ (ঙ) $y=3^{-x+1}$ (চ) $y=3^{x-1}$

১১। নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন লেখ এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ক) $y=1-2^{-x}$

(খ) $y=\log_{10}x$

(গ) $y=x^2,\quad x>0$

১২। $f(x)=ln(x-2)$ ফাংশনটির D_f ও R_f নির্ণয় কর :

১৩। $f(x)=ln\dfrac{1-x}{1+x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

১৪। ডোমেন, রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(ক) $f(x)=|x|$ যখন $-5\le x\le 5$

(খ) $f(x)=x+|x|$ যখন $-2\le x\le 2$

(গ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & \text{যখন } x\neq 0\\ 0 & \text{যখন } x=0\end{cases}$

(ঘ) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

(ঙ) $f(x)=\log\dfrac{5+x}{5-x}, -5<x<5$

১৫। দেওয়া আছে :

$$2^{2x}.\,2^{y-1} = 64 \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

এবং $6x.\,\dfrac{6^{y-2}}{3} = 72 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

ক. (i) ও (ii) কে x ও y চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।

খ. সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।

গ. x ও y এর মান যদি কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90^0, তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৬। দেওয়া আছে,

$$\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$$

ক. প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলকসংবলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণে পরিণত কর।

খ. প্রাপ্ত সমীকরণটিকে সমাধান কর এবং দেখাও যে, x এর কেবল একটি বীজ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

গ. প্রমাণ কর যে, মূলদ্বয়ের প্রতিটির বর্গ এর স্বীয় মান অপেক্ষা 1(এক) বেশি এবং এদের লেখচিত্র পরস্পর সমান্তরাল।

১৭। দেওয়া আছে,

$$y = 2^x$$

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলি লেখ।

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

দশম অধ্যায়

দ্বিপদী বিস্তৃতি

বীজগণিতীয় রাশির (একপদী, দ্বিপদী, বহুপদী) যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, বর্গ এবং ঘন সংক্রান্ত আলোচনা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে করা হয়েছে। দ্বিপদী রাশি বা বহুপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে সেই সমস্ত ক্ষেত্রে বিস্তৃতি নির্ণয় যথেষ্ট শ্রমসাধ্য ও সময়সাপেক্ষ হয়ে পড়ে। এই অধ্যায়ে দ্বিপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে কী প্রক্রিয়ায় কাজটি সম্পন্ন করা যায়, তা উপস্থাপন করা হবে। সাধারণভাবে ঘাত বা শক্তি n এর জন্য সূত্র প্রতিপাদন করা হবে। যার মাধ্যমে যেকোনো অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাতের দ্বিপদী রাশির মান নির্ণয় করা সম্ভব হবে। তবে এই পর্যায়ে n এর মান একটি নির্দিষ্ট সীমা $(n \leq 8)$ অতিক্রম করবে না। বিষয়টি যাতে শিক্ষার্থীরা সহজে বুঝতে ও ব্যবহার করতে পারে সে জন্য একটি ত্রিভুজ ব্যবহার করা হবে যেটি' প্যাসকেলের ত্রিভুজ' (Pascal's triangle) বলে পরিচিত। দ্বিপদী রাশির ঘাত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হতে পারে। কিন্তু বর্তমান আলোচনায় আমরা শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাতের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকব। পরবর্তী শ্রেণিতে সমস্ত আলোচনা অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

অধ্যয় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- দ্বিপদী বিস্তৃতি বর্ণনা করতে পারবে।
- প্যাসকেল ত্রিভুজ বর্ণনা করতে পারবে।
- সাধারণ ঘাতের জন্য দ্বিপদী বিস্তৃতি বর্ণনা করতে পারবে।
- $n!$ ও ^nC_r এর মান নির্ণয় করতে পারবে।
- দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

১০·১ দ্বিপদী $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী (*Binomials*) রাশি বলা হয়।

$a+b,\ x-y,\ 1+x,\ 1-x^2,\ a^2-b^2$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি। আমরা প্রথমেই একটি দ্বিপদী রাশি $(1+y)$ চিন্তা করি। এখন $(1+y)$ কে যদি $(1+y)$ দ্বারা ক্রমাগত গুণ করতে থাকি তাহলে পাব

$(1+y)^2,\ (1+y)^3,\ (1+y)^4,\ (1+y)^5$.......... ইত্যাদি।

আমরা জানি,

$(1+y)^2=(1+y)(1+y)=1+2y+y^2$

$(1+y)^3=(1+y)(1+y)^2=(1+y)(1+2y+y^2)\ =1+3y+3y^2+y^3$

অনুরূপভাবে দীর্ঘ গুণন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $(1+y)^4, (1+y)^5$...... ইত্যাদি গুণফল নির্ণয় সম্ভব। কিন্তু $(1+y)$ এর ঘাত বা শক্তি যত বাড়তে থাকবে গুণফল তত দীর্ঘ ও সময়সাপেক্ষ হবে। তাই এমন একটি সহজ পদ্ধতি বের করতে হবে, যাতে $(1+y)$ এর যেকোনো ঘাত (ধরি n) বা শক্তির জন্য $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি সহজেই নির্ণয় করা সম্ভব হবে। n এর মান $0, 1, 2, 3, 4,$......., অর্থাৎ অঋণাত্মক মানের জন্য এই অংশে আলোচনা সীমাবদ্ধ থাকবে। এখন প্রক্রিয়াটি আমরা ভালোভাবে লক্ষ করি।

n এর মান		প্যাসকেল ত্রিভুজ	পদসংখ্যা
$n=0$	$(1+y)^0 =$	1	1
$n=1$	$(1+y)^1 =$	$1+y$	2
$n=2$	$(1+y)^2 =$	$1+2y+y^2$	3
$n=3$	$(1+y)^3 =$	$1+3y+3y^2+y^3$	4
$n=4$	$(1+y)^4 =$	$1+4y+6y^2+4y^3+y^4$	5
$n=5$	$(1+y)^5 =$	$1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$	6

উপরের বিস্তৃতিসমূহকে ভিত্তি করে আমরা $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি সম্পর্কে নিম্নোক্ত সিদ্ধান্তে আসতে পারি।

সিদ্ধান্ত :

(*a*) $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ আছে। অর্থাৎ ঘাত বা শক্তির চেয়ে পদসংখ্যা একটি বেশি।
(*b*) y এর ঘাত 0 (শূন্য) থেকে শুরু হয়ে $1, 2, 3, ..., n$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পেয়েছে। অর্থাৎ y এর ঘাত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেয়ে n পর্যন্ত পৌঁছেছে।।

দ্বিপদী সহগ : উপরের প্রত্যেক দ্বিপদী বিস্তৃতিতে y এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ (*Coefficient*) কে দ্বিপদী সহগ বলা হয়। 1 কে y এর সহগ বিবেচনা করতে হবে। উপরের বিস্তৃতির সহগগুলোকে সাজালে আমরা পাই,

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

লক্ষ করলে দেখব সহগগুলো একটি ত্রিভুজের আকার ধারণ করেছে। দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয়ের একটি কৌশল '*Blaise Pascal*' প্রথম ব্যবহার করেন। তাই এই ত্রিভুজকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ (*Pascal's Triangle*) বলা হয়। প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে আমরা সহজেই দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে সহগসমূহ নির্ণয় করতে পারি।

প্যাসকেলের ত্রিভুজের ব্যবহার

প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে আমরা দেখতে পাই এর বাম ও ডান দিকে আছে '1'। ত্রিভুজের মাঝখানের সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি ঠিক উপরের দুইটি সংখ্যার যোগফল।
নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ করলে বিষয়টি খুব সহজেই বুঝা যাবে।

$n=5$ এর জন্য দ্বিপদী সহগ হলো : 1 5 10 10 5 1

$n = 6$ এর জন্য সহগগুলো হবে নিম্নরূপ :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (1+y)^5 \quad = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$

$\therefore (1+y)^6 \quad = 1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + 15y^4 + 6y^5 + y^6$

এবং $(1+y)^7 = 1 + 7y + 21y^2 + 35y^3 + 35y^4 + 21y^5 + 7y^6 + y^7$

কাজ : নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় কর (উপরের বিস্তৃতিসমূহের সাহায্য নাও) :

$(1+y)^8 =$

$(1+y)^9 =$

$(1+y)^{10} =$

আমরা যদি ভালোভাবে খেয়াল করি তাহলে বুঝতে পারব এই পদ্ধতির একটি বিশেষ দুর্বলতা আছে। যেমন আমরা যদি $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি জানতে চাই তাহলে $(1+y)^4$ এর বিস্তৃতি জানা দরকার। আবার যেকোনো দ্বিপদী সহগ জানার জন্য এর ঠিক উপরের পূর্ববর্তী দুইটি সহগ জানা প্রয়োজন। এই অবস্থা থেকে উত্তরণের জন্য আমরা সরাসরি দ্বিপদী সহগ নির্ণয়ের কৌশল বের করতে চাই। প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে আমরা দেখতে পাই দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগগুলোর ঘাত n এবং পদটি কোনো অবস্থানে আছে এর ওপর নির্ভরশীল। আমরা একটি নতু ন সাংকেতিক চিহ্ন $\binom{n}{r}$ বিবেচনা করি যেখানে 'n' ঘাত এবং 'r' পদের অবস্থানের সাথে সম্পর্কিত। উদাহরণস্বরূপ যদি $n = 4$ হয়, তবে পদসংখ্যা হবে 5 টি । ধরি পদ পাঁচটি যথাক্রমে T_1, T_2, T_3, T_4, T_5

আমরা পদগুলি নিম্নোক্ত উপায়ে লেখি।

যখন $n = 4$ পদসংখ্যা 5 টি : T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 ।

এদের সহগগুলি হলো : $\quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

নতুন চিহ্ন ব্যবহার করে সহগ : $\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

এখানে, $\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$

$$\binom{4}{2} = \frac{4\times3}{1\times2} = 6, \quad \binom{4}{3} = \frac{4\times3\times2}{1\times2\times3} = 4 \text{ এবং } \binom{4}{4} = \frac{4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4} = 1$$

[প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে সহজেই বুঝতে পারবে]

উল্লিখিত নতুন চিহ্নের সাহায্যে প্যাসকেলের ত্রিভুজ $(n = 1,2,3,........)$ এর জন্য হবে :

$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
$n=4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$
$n=5$	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$

সুতারাং উপরের ত্রিভুজ থেকে আমরা খুব সহজেই বলতে পারি $(1+y)^4$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় (T_{2+1}) পদের সহগ $\binom{4}{2}$ এবং $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় (T_{2+1}) ও চতুর্থ (T_{3+1}) পদের সহগ যথাক্রমে $\binom{5}{2}$ এবং $\binom{5}{3}$ ।

সাধারণভাবে $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতির r তম পদের সহগ $T_{r+1}=\binom{n}{r}$

এখন, $\binom{n}{r}$ এর মান কত তা জানার জন্য আবারও প্যাসকেলের ত্রিভুজ লক্ষ করি । প্যাসকেলের ত্রিভুজের দুইটি হেলানো পার্শ্ব থেকে আমরা দেখতে পাই,

$$\binom{1}{0}=1,\quad \binom{2}{0}=1,\quad \binom{3}{0}=1, \ldots\ldots\ldots,\quad \binom{n}{0}=1$$
$$\binom{1}{1}=1,\quad \binom{2}{2}=1,\quad \binom{3}{3}=1, \ldots\ldots\ldots,\quad \binom{n}{n}=1$$

আমরা $n=5$ ধরে পাই

$$\binom{5}{0}=1,\quad \binom{5}{1}=5,\quad \binom{5}{2}=\frac{5\times4}{1\times2}=10$$
$$\binom{5}{3}=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10,\quad \binom{5}{4}=\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}=5$$

এবং $$\binom{5}{5}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5}=1$$

সুতরাং $\binom{5}{3}$ এর মানের ক্ষেত্রে বলা যায়

$$\binom{5}{3}=\frac{5\times(5-1)\times(5-2)}{1\times2\times3}$$

এবং $$\binom{6}{4}=\frac{6\times(6-1)\times(6-2)\times(6-3)}{1\times2\times3\times4}$$

সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$\binom{n}{0} = 1, \ \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{1\times 2 \times 3 \times 4 .... \times r}$$

উপর্যুক্ত চিহ্ন ব্যবহার করে পাই,

$$(1+y)^4 = \binom{4}{0}y^0 + \binom{4}{1}y^1 + \binom{4}{2}y^2 + \binom{4}{3}y^3 + \binom{4}{4}y^4$$
$$= 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$$
$$(1+y)^5 = \binom{5}{0}y^0 + \binom{5}{1}y^1 + \binom{5}{2}y^2 + \binom{5}{3}y^3 + \binom{5}{4}y^4 + \binom{5}{5}y^5$$
$$= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$$

এবং $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

$$(1+y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + ... + \binom{n}{n}y^n$$
$$= 1 \cdot y^0 + ny + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + ... + 1\cdot y^n$$

অর্থাৎ দ্বিপদী $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

$$\boxed{\therefore (1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + ... + y^n.}$$

উদাহরণ ১। $(1+3x)^5$ কে বিস্তৃত কর।

সমাধান : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$\therefore (1+3x)^5 = 1 + 5\cdot 3x + 10\cdot(3x)^2 + 10(3x)^3 + 5(3x)^4 + 1(3x)^5$$
$$= 1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5$$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে -

$$(1+3x)^5 = \binom{5}{0}(3x)^0 + \binom{5}{1}3x + \binom{5}{2}(3x)^2 + \binom{5}{3}(3x)^3 + \binom{5}{4}(3x)^4 + \binom{5}{5}(3x)^5$$

বা, $(1+3x)^5 = 1 + \frac{5}{1}(3x) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot(3x)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(3x)^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(3x)^4 + 1\cdot(3x)^5$

$$= 1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5.$$

উদাহরণ ২। $(1-3x)^5$ কে বিস্তৃত কর

সমাধান : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে

$$(1-3x)^5 = 1+5(-3x)+10(-3x)^2+(10(-3x)^3+5(-3x)^4+1(-3x)^5$$
$$= 1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5.$$

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে

$$(1-3x)^5 = \binom{5}{0}(-3x)^0+\binom{5}{1}(-3x)^1+\binom{5}{2}(-3x)^2+\binom{5}{3}(-3x)^3+\binom{5}{4}(-3x)^4+\binom{5}{5}(-3x)^5$$
$$= 1\cdot 1+\frac{5}{1}\cdot(-3x)+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(-3x)^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(-3x)^3+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-3x)^4+1\cdot(3x)^5$$
$$= 1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5.$$

মন্তব্য : $(1+3x)^5$ এবং $(1-3x)^5$ এর বিস্তৃতি থেকে দেখা যাচ্ছে যে, উভয় বিস্তৃতি একই। শুধুমাত্র সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করে , অর্থাৎ +, −, +, ... এর মাধ্যমে একটি থেকে অন্যটি পাওয়া সম্ভব।

> **কাজ :**
> $(1+2x^2)^7$ এবং $(1-2x^2)^7$ কে বিস্তৃত কর।

উদাহরণ ৩। $\left(1+\frac{2}{x}\right)^8$ কে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে নিজে কর।

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে-

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^8 = \binom{8}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^0+\binom{8}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^1+\binom{8}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2+\binom{8}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^3+\binom{8}{3}\left(\frac{2}{4}\right)^4 \text{.........} \text{[৫ম পদ পর্যন্ত]}$$
$$= 1\cdot 1+\frac{8}{1}\cdot\frac{2}{x}+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{4}{x^2}+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{8}{x^3}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{16}{x^4}+\text{..................}$$
$$= 1+\frac{16}{x}+\frac{112}{x^2}+\frac{448}{x^3}+\frac{1120}{x^4}+\text{................}$$

$$\therefore \left(1+\frac{2}{x}\right)^8 = 1+\frac{16}{x}+\frac{112}{x^2}+\frac{248}{x^3}+\frac{1120}{x^4}+\text{................} \quad \text{[৫ম পদ পর্যন্ত]}$$

উদহরণ ৪। $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8=\binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0+\binom{8}{1}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1+\binom{8}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2+\binom{8}{3}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3+\binom{8}{4}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=1\cdot1+\frac{8}{1}\cdot\left(-\frac{x^2}{4}\right)+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{x^4}{16}+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(-\frac{x^6}{64}\right)+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\left(\frac{x^8}{256}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=1-2x^2+\frac{7}{4}x^4-\frac{7}{8}x^6+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে দেখা যাচ্ছে x^3 এর সহগযুক্ত পদ নেই। অর্থাৎ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

$\therefore$ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$.

কাজ : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে উদাহরণ ৪ এর সত্যতা যাচাই কর।

উদাহরণ ৫। $(1-x)(1+ax)^6$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি $1+bx^2$ পাওয়া যায়, তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $(1-x)(1+ax)^6$

$$(1-x)\left[\binom{6}{0}(ax)^0+\binom{6}{1}(ax)^1+\binom{6}{2}(ax)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=(1-x)\left[1+\frac{6}{1}\cdot ax+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=(1-x)(1+6ax+15a^2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$=(1+6ax+15a^2x^2+\ldots\ldots\ldots)+(-x-6ax^2-15a^2x^3-\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$=1+(6a-1)x+15a^2x^2-6ax^2-15a^2x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=1+(6a-1)x+(15a^2-6a)x^2-15a^2x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

প্রশ্নমতে,

$$1+(6a-1)x+(15a^2-6a)x^2-15a^2x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=1+bx^2$$

উভয়পক্ষ থেকে x ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$6a-1=0, 15a^2-6a=b$

বা $a=\frac{1}{6}$, এবং $b=15\cdot\frac{1}{36}-6\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-=-\frac{7}{12}$

$\therefore\ a=\frac{1}{6},\ b=\frac{-7}{12}$

উত্তর : $a=\frac{1}{6},\ b=\frac{-7}{12}$

উদাহরণ ৬। $(1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$(1-x)^8(1+x)^7=(1-x)(1-x)^7(1+x)^7=(1-x)(1-x^2)^7$

$=(1-x)\left[\binom{7}{0}(-x^2)^0+\binom{7}{1}(-x^2)^1+\binom{7}{2}(-x^2)^2+\binom{7}{3}(-x^2)^3+\binom{7}{4}(-x^2)^4+\ldots\ldots\right]$

$\therefore\ (1-x)^8(1+x)^7=(1-x)[1-7x^2+21x^4-35x^8+35x^6-\ldots\ldots\ldots\ldots]$

$=(1-7x^2+21x^4-35x^6+35x^8-35x^4+\ldots\ldots\ldots\ldots)+(-x+7x^3-21x^5+35x^7-35x^9+\ldots\ldots\ldots$

$\therefore\ (1-x)^8(1+x)^7=1-x-7x^2+7x^3+21x^4-21x^5-35x^6+35x^7-\ldots\ldots\ldots\ldots]$

$=(1-x)^8(1+x)^7=1-x-7x^2+7x^3+21x^4-21x^5-35x^6+35x^7+35x^8\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore\ (1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35

$\therefore\ x^7$ এর সহগ 35

উদাহরণ ৭। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর । উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1\cdot9\times(1\cdot05)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=(2-x)\left[\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0+\binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1+\binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\binom{8}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\ldots\ldots\right]$

বা $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=(2-x)\left[1\cdot1+\frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2}+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\frac{x^3}{8}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$

$=(2-x)(1+4x+7x^2+7x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$=(2+8x+14x^2+14x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots)+(-x-4x^2-7x^3-7x^4-\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$=2+7x+10x^2+7x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore (2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=2+7x+10x^2+7x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=2+7x+10x^2+7x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$

এখন উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$$(2-\cdot1)\times\left(1+\frac{\cdot1}{2}\right)^8 = 2+7\times(\cdot1)+10(\cdot1)^2+7(\cdot1)^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

বা, $1\cdot9\times(1\cdot05)^8 = 2+\cdot7+10\times(\cdot01)+7(\cdot001)+\ldots\ldots\ldots\ldots$

বা, $1\cdot9\times(1\cdot05)^8 = 2+\cdot7+\cdot1+\cdot007+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 2\cdot807$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

Ans : $1\cdot9\times(1\cdot05)^8 = 2\cdot807$

কাজ : প্যাসকেলের ত্রিভুজের মাধ্যমে বিস্তৃতিটি যাচাই কর।

অনুশীলনী ১০·১

১। প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(i)\,(1-y)^5$ ও $(ii)\,(1+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

২। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে

(a) $(1+4x)^6$, $(b)\,(1-3x)^7$ এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি কর।

৩। $(1+x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1\cdot01)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে নিম্নোক্ত দ্বিপদীসমূহের প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর।

$(a)\,(1-2x)^5$, $(b)\,(1+3x)^9$

তারপর, $(c)\,(1-2x)^5(1+3x)^9$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

৫। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। [দ্বিপদী বিস্তৃতি বা প্যাসক্যাল ত্রিভুজ এর যেকোনো একটি ব্যবহার করে]

(a) $(1-2x^2)^7$ $\qquad$ (b) $\left(1+\frac{2}{x}\right)^4$ $\qquad$ (c) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^7$

৬। x^3 পর্যন্ত $(a)\,(1-x)^6$ এবং $(b)\,(1+2x)^6$ বিস্তৃত কর। তারপর $(c)\,(1+x-2x^2)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

৭। x এর মান যথেষ্ট ছোট হওয়ায় x^3 এবং এর উর্ধ্ব ঘাতের মান অপেক্ষা করা যায়। প্রমাণ কর যে, $(1+x)^5(1-4x)^4 = 1-11x+26x^2$.

১০·২ দ্বিপদী : $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতি :

আমরা এ পর্যন্ত $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি নিয়ে আলোচনা করেছি। এই পর্যায়ে আমরা দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ আকার $(x+y)^n$ নিয়ে আলোচনা করব যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতি সাধারণভাবে দ্বিপদী উপপাদ্য নামে পরিচিত।

আমরা জানি,

$$(1+y)^n = 1+\binom{n}{1}y+\binom{n}{2}y^2+\binom{n}{3}y^3+\binom{n}{r}y^r+\ldots\ldots\ldots\binom{n}{n}y^n$$

এখন, $(x+y)^n = \left[x\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\right]^n = x^n\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^n$

$$\therefore\ (x+y)^n = x^n\left[1+\binom{n}{1}\left(\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\binom{n}{n}\left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$$

$$\therefore\ (x+y)^n = x^n\left[1+\binom{n}{1}\left(\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\frac{y^2}{x^2}+\binom{n}{3}\frac{y^3}{x^3}+\ldots\ldots\ldots\frac{y^n}{x^n}\right]\ \left[\because\binom{n}{n}=1\right]$$

$$= x^n+\binom{n}{1}\left(x^n\cdot\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\left(x^n\cdot\frac{y^2}{x^2}\right)+\binom{n}{3}\left(x^n\cdot\frac{y^3}{x^3}\right)+\ldots\ldots\ldots+x^n\cdot\frac{y^n}{x^n}$$

$$\boxed{\therefore (x+y)^n = x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots\ldots\ldots+y^n}$$

এটিই হচ্ছে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার। লক্ষণীয়, এই বিস্তৃতি $(1+y)^n$ এর অনুরূপ। এখানে x এর ঘাত n থেকে 0 পর্যন্ত যোগ করা হয়েছে। আরও লক্ষণীয়, প্রতি পদে x ও y এর ঘাতের যোগফল দ্বিপদীর ঘাতের সমান। প্রথম পদে 'x' এর ঘাত n থেকে শুরু হয়ে সর্বশেষ পদে শূন্য। ঠিক বিপরীতভাবে y এর ঘাত প্রথম পদে শূন্য থেকে শুরু হয়ে শেষ পদে n হয়েছে।

উদাহরণ ৮। $(x+y)^5$ কে বিস্তৃত কর এবং উহা হইতে $(3+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান : $(x+y)^5 = x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}xy^4+\ldots$

$$= x^5+5x^4y+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}x^3y^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}x^2y^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}xy^4+y^5$$
$$= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি : $(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$

এখন $x=3$ এবং $y=2x$ বসাই

$$(2+2x)^5 = 3^5+5\cdot3^4\cdot2x+10\cdot3^3(2x)^2+10\cdot3^2(2x)^3+5\cdot3(2x)^4+(2x)^5.$$
$$= 243+810x+1080x^2+720x^3+240x^4+32x^5$$

সুতরাং, $(3+2x)^5 = 243+810x+1080x^2+720x^3+240x^4+32x^5$

উদাহরণ ৯। $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ কে x এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং x মুক্ত পদটি শনাক্ত কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6 = (x)^6 + \binom{6}{1}x^5\left(\frac{1}{x^2}\right) + \binom{6}{2}x^4\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \binom{6}{3}x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^6 + 6x^3 + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\,\frac{1}{x^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^6 + 6x^3 + 15 + 20\frac{1}{x^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

উত্তর : নির্ণেয় বিস্তৃতি $x^6 + 6x^3 + 15 + \frac{20}{x^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

এবং x মুক্ত পদ 15

উদাহরণ ১০। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(1\cdot 995)^7$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান : $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7 = 2^7 + \binom{7}{1}2^6\left(-\frac{x}{2}\right) + \binom{7}{2}2^5\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{7}{3}2^4\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= 128 + 7\cdot 64\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot 32\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 16\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$\therefore\ \left(2-\frac{x}{2}\right)^7 = 128 - 224x + 168x^2 - 70x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তার $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7 = 128 - 224x + 168x^2 - 70x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

এখন, $2-\frac{x}{2} = 1\cdot 995$

বা, $\frac{x}{2} = 2\cdot 000 - 1\cdot 995$

বা, $x = 0\cdot 01$ বসিয়ে পাই

$$\left(2-\frac{0\cdot 01}{2}\right)^7 = 128 - 224\times(\cdot 01)\ + 168\times(01)^2 - 70\times(\cdot 01)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

বা, $(1\cdot 995)^7 = 125\cdot 7767$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

১০·৩ $n!$ এবং n_{c_r} এর মান নির্ণয় :

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ করি :

$2 = 2\cdot 1$
$6 = 3\cdot 2\cdot 1$
$24 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
$120 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
— — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — —

ডানদিকের গুণফলসমূহকে আমরা এখন সংক্ষেপে একটি সাংকেতিক চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি।

$2 = 2 \cdot 1 = 2\,!$
$6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,!$
$24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4\,!$
$120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,!$
- - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - -

এখন লক্ষ করি

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3)$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 5 \cdot (5-4) \cdot (5-2)(5-3) \cdot (5-4)$$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\therefore$ সাধারণভাবে লিখতে পারি, $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

এবং $n!$ কে ফেক্টোরিয়াল (*Factorial*) n বলা হয়।

তদ্রূপ, $3!$ কে ফেক্টোরিয়াল তিন,

$4!$ কে ফেক্টোরিয়াল চার ইত্যাদি পড়া হয়।

আবার লক্ষ করি :

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 1)}$$
$$= \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$
$$\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!}$$
$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4! \times (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{7\,!}{4! \times 3\,!}$$
$$= \frac{7!}{4!(7-4)!}$$

$\therefore$ সাধারণভাবে আমরা বলতে পারি $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

ডান পাশের ফেক্টোরিয়ালসমূহকে যে প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় তা হলো,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}^{n}c_{r}$$
$$\therefore \quad \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = {}^{7}c_{4}$$

এবং $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 5_{c_3}$

সুতরাং, $\binom{n}{r} = n_{c_r}$

অর্থাৎ, $\binom{n}{r}$ ও n_{c_r} এর মান সমান।

$$\therefore \binom{n}{1} = n_{c_1}, \quad \binom{n}{2} = n_{c_2}$$
$$\binom{n}{3} = n_{c_3}, \ldots, \binom{n}{n} = n_{c_n}$$

আমরা জানি $\binom{n}{n} = 1 = n_{c_n}$

এখন $n_{c_n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!(0)!} = \frac{1}{0!}$

$\therefore 1 = \frac{1}{0!}$

অর্থাৎ, $0! = 1$.

মনে রাখতে হবে

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots 3.2.1 \\ \binom{n}{r} = n_{c_r}, \quad n_{c_n} = 1. \\ \binom{n}{r} = n_{c_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \binom{n}{o} = n_{c_0} = 1 \\ \binom{n}{n} = n_{c_n} = 1,\ 0! = 1. \end{array}}$$

এখন দ্বিপদী উপপাদ্যকে আমরা $\binom{n}{r}$ এর স্থলে n_{c_r} দ্বারা প্রকাশ করব।

$$(1+y)^n = 1 + n_{c_1}.y + n_{c_2}.y^2 + n_{c_3}.y^3 + \ldots\ldots + n_{c_r}.y^r + \ldots\ldots\ldots n_{c_n}y^n$$

বা, $(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}y^4 \ldots\ldots\ldots\ldots + y^n$

$$\boxed{\text{অর্থাৎ } (1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y^n}$$

এবং অনুরূপভাবে,

$$(x+y)^n = x^n + n_{c_1}x^{n-1}y + n_{c_2}x^{n-2}y^2 + n_{c_3}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots + n_{c_r}x^{n-r}y^r + \ldots\ldots\ldots + n_{c_n}y^n$$

বা $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y^n$

লক্ষণীয় : ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য

১। দ্বিপদী বিস্তৃতি $(1+y)^n$ এর সাধারণ পদ বা r তম পদ $T_{r+1} = \binom{n}{r}y^r$ বা $n_{c_r} y^r$

এখানে, $\binom{n}{r}$ বা n_{c_r} দ্বিপদী সহগ।

$$(x+y)^n = x^n + n_{c_1}x^{n-1}y + n_{c_2}x^{n-2}y^2 + n_{c_3}x^{n-3}y^3 + n_{c_4}x^{n-4}y^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}y^4 \ldots\ldots + y^n$$

সাধারণ পদ বা r তম পদ

$$T_{r+1} = \left(\frac{n}{r}\right)x^{n-r}y^r \text{ বা } n_{c_r} x^{n-r}y^r$$

যেখানে $\left(\frac{n}{r}\right)$ বা n_{c_r} দ্বিপদী সহগ।

উদাহরণ ১১। $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^5$ কে বিস্তৃত কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^5 = x^5 + 5_{c_1}x^{5-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 5_{c_2}x^{5-2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + 5_{c_3}x^{5-3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3 + 5_{c_4}x^{5-4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{x}\right.$$

$$= x^5 - 5x^4\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}x^3\cdot\frac{1}{x^4} - \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}x^2\cdot\left(\frac{1}{x^6}\right) + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x\cdot\left(\frac{1}{x^8}\right) - \frac{1}{x^{10}}$$

$$= x^5 - 5x^3 + \frac{10}{x} - \frac{10}{x^4} + \frac{5}{x^7} - \frac{1}{x^{10}}$$

উদাহরণ ১২। $\left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

সমধান :

$$\left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8 = (2x^2)^8 + 8_{c_1}(2x^2)^7\left(-\frac{1}{2x}\right) + 8_{c_2}(2x^2)^6\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + 8_{c_3}(2x^2)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 256x^{16} - 512x^{13} + 448x^{10} - 224x^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

অনুশীলনী ১০.২

১। i $8_{c_0} = 8_{c_8}$

ii $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r}$

iii $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয় পদটি

$= \frac{n(n-1)}{2!}x^2$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

২। $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ রয়েছে। এখানে n একটি

ক. অঋণাত্মক রাশি খ. ধনাত্মক রাশি

গ. ঋণাত্মক রাশি ঘ. ভগ্নাংশ

৩। $(x+y)^5$-এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলি হলো :

ক. 5, 10, 10, 5 খ. 1, 5, 10, 10, 5, 1

গ. 10, 5, 5, 10 ঘ. 1, 2, 3, 3, 2, 1

৪। $(1-x)(1+\frac{x}{2})^8$ -এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ

ক. -1 খ. $\frac{1}{2}$ গ. 3 ঘ. $-\frac{1}{2}$

৫। $(x^2+\frac{1}{x^2})^4$-এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কত?

ক. 4 খ. 6 গ. 8 ঘ. 0

৬। $(2-x)(1+ax)^5$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি $2+9x+cx^2$ পাওয়া যায়, তবে a ও c এর মান

ক. a = 1, c = 15 খ. a = 5, c = 15

গ. a = 15 c = 1 ঘ. a = 1, c = o

নিচের তথ্যের আলোকে ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$n_{c_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ হলে

৭। n_{c_n} = কত?

ক. 0 খ. 1 গ. n ঘ. নির্ণয় করা যায় না

৮। n = r = 100 হলে n_{c_r} এর মান

ক. 0 খ. 1 গ. 100 ঘ. 200

৯। $(x+y)^4$ এর বিস্তৃতির সহগগুলিকে সাজালে আমরা পাই

ক.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 4 & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 1 & \\ & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 6 & & 10 & & 6 & & 1 \end{array}$$

খ.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

গ.

				2				
			2	3	2			
		1	5	5	2			
		2	7	10	7	2		

ঘ.

				6				
			6	12	6			
		6	18	18	6			
		6	24	36	24	6		

১০। নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে বিস্তৃত কর :

(a) $(2+x^2)^5$ (b) $\left(2-\frac{1}{2x}\right)^6$

১১। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর:

(a) $(2+3x)^6$ (b) $\left(4-\frac{1}{2x}\right)^5$

১২। $\left(p-\frac{1}{2}x\right)^6 = r-96x+5x^2+........$ হলে, p এবং r এর মান নির্ণয় কর।

১৩। $\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

১৪। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2+\frac{x}{4}\right)^8$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1\cdot9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৫। দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1\cdot99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৬। $\left(1+\frac{1}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

১৭। (a) $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

(b) $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

সৃজনশীল প্রশ্ন

১৮। দেওয়া আছে,

$P=(a+bx)^6$ ..... (i)

$Q=(b+ax)^5$ ..... (ii)

$R=(a+x)^n$ ..... (iii)

ক. (iii) এর বিস্তৃতিটি লেখ এবং সূত্রটি প্রয়োগ করে (i) এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

খ. যদি (i) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে (ii) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হয় তবে দেখাও যে, $a:b=\sqrt{5}:2$। উপরিউক্ত উক্তির স্বপক্ষে একটি উদাহরণ দাও।

গ. দেখাও যে, (ii) এর বিস্তৃতির জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফল বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফলের সমান। তুমি এমন একটি দ্বিপদী রাশি উল্লেখ কর, যার ক্ষেত্রেও উপরি-উক্ত বিষয়টি সত্য হয়।

একাদশ অধ্যায়

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

বিন্দু, সরলরেখা ও বক্ররেখার বীজগাণিতিক প্রকাশকে জ্যামিতির যে অংশে অধ্যয়ন করা হয়, তাও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি নামে পরিচিত। জ্যামিতির এই অংশ বিশ্লেষণ জ্যামিতি (*Analytic Geometry*) নামেও পরিচিত। সমতলে বিন্দু পাতনের মাধ্যমে সরল বা বক্ররেখা অথবা এদের দ্বারা তৈরি জ্যামিতিক ক্ষেত্র যথা, ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি চিত্র প্রকাশ করা হয়। সমতলে বিন্দু পাতনের পদ্ধতির সূচনা করেন বিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ *Rene Descartes* (ডেকার্তে নামে পরিচিত)। ডেকার্তের প্রবর্তিত জ্যামিতির এই স্থানাঙ্ক (*Coordinates*) প্রথা তাঁরই নামানুসারে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (*Cartesian Coordinates*) নামে পরিচিত। স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ও বিশ্লেষণ জ্যামিতি মূলত কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ভর। তাই ডেকার্তেকে বিশ্লেষণ জ্যামিতির প্রবর্তক বলা যায়।

এই অধ্যায়ের প্রথম অংশে শিক্ষার্থীদের সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা প্রদানের মাধ্যমে দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হবে। দ্বিতীয় অংশে সরলরেখার মাধ্যমে সৃষ্ট যেকোনো ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করা হবে এবং তৃতীয় অংশে সরলরেখার ঢাল নির্ণয় এবং দুইটি বিন্দুর সংযোগে সরলরেখার সরলীকরণ নির্ণয়ের কৌশল ব্যাখ্যা করা হবে। বক্ররেখা দ্বারা সৃষ্ট কোনো জ্যামিতিক চিত্র বা সমীকরণের আলোচনা এখানে করা হবে না। উচ্চতর শ্রেণিতে এ সংক্রান্ত বিশদ আলোচনা করা হবে।

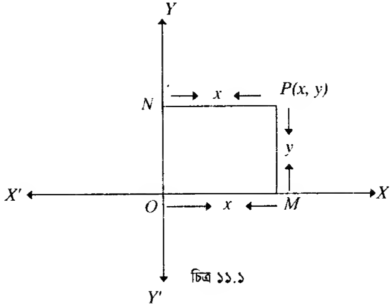
অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা --

- সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে।
- সরলরেখার ঢালের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বিন্দুপাতনের মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সংক্রান্ত জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- সরলরেখার সমীকরণ লেখচিত্রে উপস্থাপন করতে পারবে।

১১·১ আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (*Rectangular Cartesian Coordinates*)

সমতলের ধারণা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে দেওয়া হয়েছে। একটি টেবিলের উপরিভাগ, ঘরের মেঝে, বই-এর উপরিভাগ এমন কি যে কাগজের ওপর লেখা হয় এদের প্রত্যেকেই সমতল। একটি ফুটবলের উপরিভাগ বা একটি বোতলের উপরিভাগ হলো বক্রতল। এই অংশে সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দুর সঠিক অবস্থান নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হবে। সমতলে অবস্থিত কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সঠিক অবস্থান নির্ণয়ের জন্য ঐ সমতলে অঙ্কিত দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা হতে নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব জানা প্রয়োজন। এর কারণ হিসেবে বলা যায় পরস্পরছেদী দুইটি সরলরেখা হতে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে কেবল একটি বিন্দুই থাকতে পারে।

কোনো সমতলে পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' আঁকলে XOX' কে x অক্ষ (x-*axis*), YOY' কে y অক্ষ (y-*axis*) এবং ছেদবিন্দু 'O' কে মূলবিন্দু (*Origin*) বলা হয়।



চিত্র ১১.১

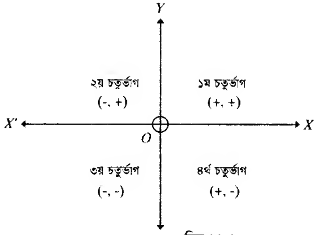
এখন ধরে নিই অক্ষদ্বয়ের সমতলে যেকোনো বিন্দু P। উক্ত P বিন্দু থেকে XOX' অর্থাৎ, x অক্ষ এবং YOY' অর্থাৎ y অক্ষের ওপর লম্ব যথাক্রমে PM এবং PN। তাহলে y-অক্ষ হতে P বিন্দু দূরত্ব $= NP = OM = x$ কে P বিন্দুর ভুজ (*abscissa*) বা x স্থানাঙ্ক (x-*coordinate*) বলে। আবার x অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= MP = ON = y$ কে P বিন্দুর কোটি (*Ordinate*) বা y স্থানাঙ্ক (y-*coordinate*) বলা হয়। ভুজ ও কোটিকে এক সাথে স্থানাঙ্ক বলা হয়। সুতরাং চিত্রে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলতে y অক্ষ ও x অক্ষ হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব বোঝায় এবং এদেরকে x ও y দ্বারা নির্দেশ করে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x, y)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বিন্দুর স্থানাঙ্ক সূচক (x, y) একটি ক্রমজোড় বুঝায় যার প্রথমটি ভুজ ও দ্বিতীয়টি কোটি নির্দেশ করে। তাই (x, y) ও (y, x) দ্বারা দুইটি ভিন্ন বিন্দু বোঝায়। সুতরাং পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়। বিন্দুটি y অক্ষের ডানে থাকলে ভুজ ধনাত্মক ও বামে থাকলে ভুজ ঋণাত্মক হবে। আবার বিন্দুটি x অক্ষের উপরে থাকলে কোটি ধনাত্মক এবং নিচে থাকলে কোটি ঋণাত্মক হবে। x অক্ষের ওপর কোটি শূন্য এবং y অক্ষের ওপর ভুজ শূন্য হবে।

সুতরাং কোনো বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে OX ও OY বরাবর বা এদের সমান্তরাল দিকে থাকবে। একইভাবে ঋণাত্মক ভুজ বা কোটি OX' ও OY' বরাবর যা এদের সমান্তরাল দিকে থাকবে।

কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সমতল XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ এই চারটি ভাগে বিভক্ত হয়। এদের প্রত্যেকটিকে চতুর্ভাগ (*Quadrant*) বলা হয়।

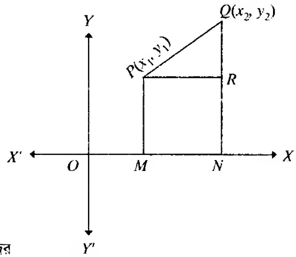
XOY চতুর্ভাগকে প্রথম ধরা হয় এবং ঘড়ির কাঁটার আবর্তনের বিপরীত দিকে পর্যায়ক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ ধরা হয়। কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের চিহ্ন অনুসারে বিন্দুর অবস্থান বিভিন্ন চতুর্ভাগে থাকে।



চিত্র ১১.২

১১·২ দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two Points)

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ একটি সমতলে অবস্থিত দুইটি ভিন্ন বিন্দু। P ও Q বিন্দু থেকে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব আঁকি। আবার P বিন্দু থেকে QN এর ওপর লম্ব PR আঁকি।



চিত্র : ১১.৩

এখন P বিন্দুর ভুজ $= OM = x_1$

এবং P বিন্দুর কোটি $= MP = y_1$

Q বিন্দুর ভুজ $= ON = x_2$ ও কোটি $NQ = y_2$

$\therefore$ চিত্র হতে আমরা পাই –

$$PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$$
$$QR = NQ - NR = NQ - MP = y_2 - y_1$$

অঙ্কন অনুসারে, PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং PQ ত্রিভুজের অতিভুজ। তাই পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

বা $PQ = \pm\sqrt{PR^2 + QR^2}$

$\therefore PQ = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore$ P বিন্দু হতে Q বিন্দুর দূরত্ব

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

যেহেতু দূরত্ব সবসময় অঋণাত্মক হয় সেহেতু ঋণাত্মক মান পরিহার করা হয়েছে।

আবার Q বিন্দু হতে P বিন্দুর দূরত্ব একই নিয়মে

$$QP = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\therefore \; PQ = QP.$

P বিন্দু হতে Q বিন্দু বা Q বিন্দু হতে P বিন্দুর দূরত্ব সমান।

অর্থাৎ, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = QP.$

অনুসিদ্ধান্ত : মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে সমতলে অবস্থিত যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর দূরত্ব

$$PQ = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

উদাহরণ ১। $(1, 1)$ এবং $(2,2)$ বিন্দু দুইটি একটি সমতলে চিহ্নিত কর। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

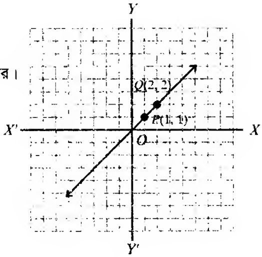
ধরি, $P(1, 1)$ এবং $Q(2, 2)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

চিত্রে, xy সমতলে বিন্দুদ্বয়কে চিহ্নিত করা হলো।

বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}$ একক।

$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ একক।



চিত্র ১১.৪

উদাহরণ ২। মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং অপর দুইটি বিন্দু $P(3, 0)$ ও $Q(0, 3)$ সমতলে চিহ্নিত কর। প্রতি দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। তিনটি বিন্দু যোগ করলে যে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কিত হয় এর নাম কী এবং কেন ?

সমাধান : $O(0, 0), P(3, 0)$ ও $Q(0, 3)$ বিন্দু তিনটির অবস্থান xy সমতলে দেখানো হলো :

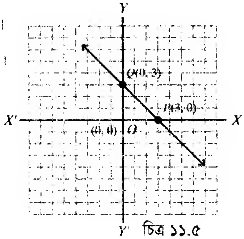
দূরত্ব $OP = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3$ একক।

দূরত্ব $OQ = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{3^2} = 3$ একক।

দূরত্ব $PQ = \sqrt{(3-O)^2 + (O-3)^2}$ একক।

$= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9}$ একক।

$= \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}.$ একক।

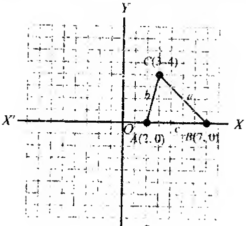


চিত্র ১১.৫

জ্যামিতিক চিত্রটির নাম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ কারণ এর দুই বাহু OP এবং OQ দূরত্ব সমান।

উদাহরণ ৩। একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(2, 0)$, $B(7, 0)$ ও $C(3, 4)$। সমতলে এদের অবস্থান দেখাও এবং ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ত্রিভুজটির পরিসীমা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান : xy সমতলে $A(2, 0)$, $B(7, 0)$ ও $C(3, 4)$ এর অবস্থান দেখানো হলো :



চিত্র ১১.৬

ABC ত্রিভুজের

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $(c) = \sqrt{(7-2)^2+(0-0)^2} = \sqrt{5^2} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $(a) = \sqrt{(3-7)^2+(4-0)^2} = \sqrt{(-4)^2+4^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $(b) = \sqrt{(3-2)^2+(4-0)^2} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$ একক

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা $= AB+BC+AC$ বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি

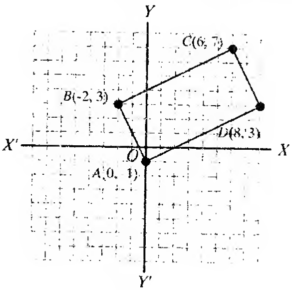
$= (c+a+b)$

$= (5+4\sqrt{2}+\sqrt{17})$ একক

$= 14\cdot77996$ একক (প্রায়)

উদাহরণ ৪। দেখাও যে, $(0, -1)$, $(-2, 3)$, $(6, 7)$ এবং $(8, 3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

মনে করি, $A(0, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(6, 7)$ এবং $D(8, 3)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ। xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো :



চিত্র ১১.৭

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-0)^2+\{3-(-1)\}^2} = \sqrt{(-2)^2+(4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক।

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2+(3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক।

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য = CD বাহুর দৈর্ঘ্য

আবার,

AD বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(8-0)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ একক।

BC বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(7-3)^2} = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ একক।

$\therefore$ AD বাহুর দৈর্ঘ্য = BC বাহুর দৈর্ঘ্য

$\therefore$ বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং বলা যায়, $ABCD$ একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র।

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(8-(-2))^2+(3-3)^2} = \sqrt{(10)^2+(0)^2} = \sqrt{100} = 10$ একক।

এখন, $BD^2 = 100$, $AB^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$, $AD^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$

$$AB^2 + AD^2 = 20 + 80 = 100$$

$$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle BAD$ সমকোণ।

সুতরাং এ দ্বারা প্রমাণিত হলো যে, $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র।

উদাহরণ ৫। দেখাও যে, $(-3,-3)$, $(0,0)$ ও $(3,3)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা কোনো ত্রিভুজ তৈরি করা যায় না।

সমাধান :

ধরি, $A(-3,-3)$, $B(0,0)$ ও $C(3,3)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ। xy সমতলে তাদের অবস্থান দেখানো হলো :

আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়। ধরে নিই ABC একটি ত্রিভুজ ও AB, BC ও AC এর তিনটি বাহু।

এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{\{0-(-3)\}^2+\{0-(-3)\}^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক

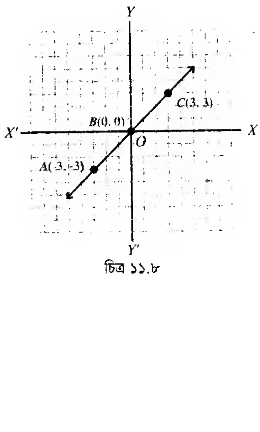
BC বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(3+3)^2+(3+3)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ একক

দেখা যাচ্ছে, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = AC$

অর্থাৎ দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান।

$\therefore$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করে এবং এদের দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়।



চিত্র ১১.৮

অনুশীলনী ১১·১

১। প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দুসমূহের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

(i) $(2, 3)$ ও $(4, 6)$ (ii) $(-3, 7)$ ও $(-7, 3)$ (iii) (a, b) ও (b, a)

(iv) $(0, 0)$ ও $(\sin\theta, \cos\theta)$ (v) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ ও $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(2, -4)$, $B(-4, 4)$ ও $C(3, 3)$। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৩। $A(2, 5)$, $B(-1, 1)$ ও $C(2, 1)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটি আঁক ও দেখাও যে এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

৪। $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$ ও $C(5, -1)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় কি না যাচাই কর।

৫। মূলবিন্দু থেকে $(-5, 5)$ ও $(5, k)$ বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে k এর মান নির্ণয় কর।

৬। দেখাও যে, $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$ এবং $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এর পরিসীমা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৭। দেখাও যে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$ একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

৮। $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্র তা নির্ণয় কর।

৯। $A(10, 5)$, $B(7, 6)$, $C(-3, 5)$ বিন্দুগুলোর মধ্যে কোনটি $P(3, -2)$ এর সবচেয়ে নিকটবর্তী ও কোনটি সবচেয়ে দূরবর্তী।

১০। $P(x, y)$ বিন্দু থেকে y-অক্ষের দূরত্ব এবং $Q(3, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। প্রমাণ কর যে, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$.

১১·৩ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল *(Area of Triangles)*

আমরা জানি তিনটি ভিন্ন বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থান না করলে ঐ তিনটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা যোগ করলে একটি ত্রিভুজক্ষেত্র পাওয়া যায়। উক্ত ত্রিভুজক্ষেত্রটি বাহুভেদে এবং কোণভেদে ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। এই অংশে আমরা একটি মাত্র সূত্রের সাহায্যে যেকোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে ত্রিভুজটিরক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে সক্ষম হব। একই সূত্রের সাহায্যে যেকোনো চতুর্ভুজকে দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করাও সম্ভব হবে। এক্ষেত্রে আমরা ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির পরিসীমা (বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি) এবং বাহুর দৈর্ঘ্যের

মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করব। যেকোনো ত্রিভুজ আকৃতি বা কোণাকৃত্রির জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের এই পদ্ধতি অর্থাৎ বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। অর্থাৎ জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে এটি খুবই কার্যকর। কারণ হিসেবে বলা যায় ত্রিকোণাকার বা চৌকোনাকার জমির শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক জানা নাই বা সম্ভব নয় কিন্তু যদি স্থানাঙ্ক জানা থাকে তাহলে আমরা আরও সহজে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে সক্ষম হব। এই অংশে আমরা দুইটি পদ্ধতির মাধ্যমে ত্রিভুজ বা বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করব।

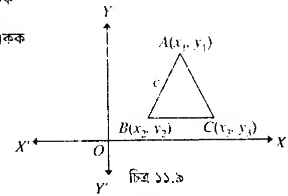
পদ্ধতি ১ :

ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র : পার্শ্বের চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ দেখানো হয়েছে। $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ তিনটি ভিন্ন বিন্দু এবং AB, BC ও CA ত্রিভুজের তিনটি বাহু। দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্যে সহজেই AB, BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় সম্ভব। যেমন :

AB বাহুর দৈর্ঘ্য 'c' ধরে $c = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য 'a' ধরে $a = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য 'b' ধরে $b = \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$ একক



চিত্র ১১.৯

এখন ত্রিভুজটির পরিসীমা '$2s$' ধরে

$2s = a+b+c$ [পরিসীমা = বাহু তিনটি দৈর্ঘ্যের সমষ্টি]

অর্থাৎ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ একক

এখানে s হলো ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেক।

আমরা 's' এবং a, b, c এর সাহায্যে সহজেই যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি।

ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নিণয়ের সূত্র :

ত্রিভুজ ABC এর AB বাহুর দৈর্ঘ্য 'c', BC বাহুর দৈর্ঘ্য 'a' এবং CA বাহুর দৈর্ঘ্য 'b' এবং পরিসীমা '$2s$' হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক। [মাধ্যমিক স্তরে গণিত জ্যামিতি এর পরিমিতি অংশে প্রমাণ দেওয়া আছে। শিক্ষার্থীরা প্রমাণটি দেখে নেবে।]

নিম্নোক্ত উদাহরণসমূহের মাধ্যমে সূত্রটির ব্যবহার সহজেই বোঝা যাবে।

লক্ষণীয় : বিভিন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র রয়েছে, কিন্তু একটি মাত্র সূত্রের সাহায্যে আমরা এখানে যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে সক্ষম হব।

উদাহরণ ১। $A(2, 5)$, $B(-1, 1)$ এবং $C(2, 1)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির একটি মোটামুটি চিত্র আঁক এবং পরিসীমা ও বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ত্রিভুজটি কোন ধরনের ত্রিভুজ চিত্র দেখে আন্দাজ কর এবং এর স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

সমাধান : পাশের চিত্রে ত্রিভুজটি দেখানো হলো :

AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(-1-2)^2+(1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(2+1)^2+(1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(2-2)^2+(1-5)^2} = \sqrt{0+16} = 4$ একক

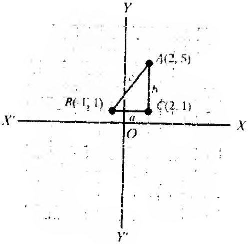
$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(5+3+4) = \frac{12}{2} = 6$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6(6-5)(6-3)(6-4)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2}$ বর্গ একক

$= 6$ বর্গ একক



চিত্র ১১.১০

চিত্র দেখে আমরা বুঝতে পারি এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।
পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে এটি সহজেই প্রমাণ করা যায়

$AB^2 = c^2 = 5^2 = 25$

$BC^2 = a^2 = 3^2 = 9$

$CA^2 = b^2 = 4^2 = 16$

$BC^2 + CA^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore AB^2 = BC^2 + CA^2$

$\therefore ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ। AB অতিভুজ ও $\angle ACB$ সমকোণ।

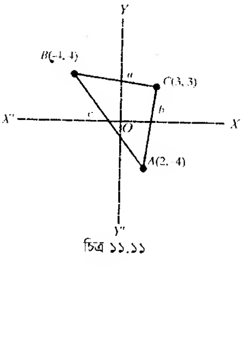
উদাহরণ ২। $A(2, -4)$, $B(-4, 4)$ এবং $C(3, 3)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ। ত্রিভুজটি আঁক এবং বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। চিত্র দেখে ত্রিভুজটির একটি নাম দাও এবং এর স্বপক্ষে যুক্তি দেখাও।

সমাধান : ABC ত্রিভুজটির চিত্র আঁকা হলো :

$AB = c = \sqrt{(-4-2)^2 + \{4-(-4)\}^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক

$BC = a = \sqrt{(3-(-4))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

$CA = b = \sqrt{(2-3)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক



চিত্র ১১.১১

এখন, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(10+5\sqrt{2}+5\sqrt{2})=\frac{1}{2}(10+10\sqrt{2}=5+5\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{(5+5\sqrt{2})(5+5\sqrt{2}-10)(5+5\sqrt{2})-5\sqrt{2})(5+5\sqrt{2}-5\sqrt{2})}$ বর্গ একক

$=\sqrt{(5+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-5)\cdot 5\cdot 5}$ বর্গ একক

$=5\sqrt{(5\sqrt{2}+5)(5\sqrt{2}-5)}$ বর্গ একক

$=5\sqrt{(5\sqrt{2})^2-5^2}=5\sqrt{50-25}=5\sqrt{25}$ বর্গ একক

$=5\cdot 5=25$ বর্গ একক

প্রদত্ত ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। কেননা $BC=CA=5\sqrt{2}$ একক। অর্থাৎ, ত্রিভুজটির দুইট বাহু সমান।

আবার, $AB^2=10^2=100$

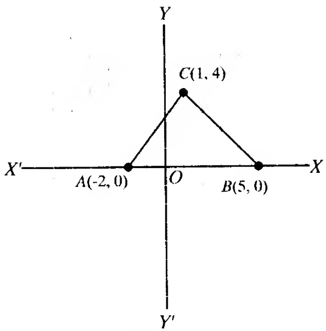
$BC^2+CA^2=(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2=50+50=100$

$\therefore \quad AB^2=BC^2+CA^2$

$\therefore$ এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অর্থাৎ ΔABC একটি সমকোণী ও সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদাহরণ ৩। একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(-2,0)$, $B(5,0)$ এবং $C(1,4)$ প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ত্রিভুজটি কী ধরনের অনুমান কর এবং স্বপক্ষে যুক্তি দাও।



চিত্র : ১১.১২

সমাধান : ত্রিভুজটির (চিত্র : ১১.১২) চিত্র দেখানো হলো :

$AB = c = \sqrt{(5-(-2))^2+(0-0))^2} = \sqrt{49} = 7$ একক

$BC = a = \sqrt{(1-5)^2+(4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক

$CA = b = \sqrt{(-2-1)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ একক

$S = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5) = \frac{1}{2}(12+4\sqrt{2}) = 6+2\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-7)(6+2\sqrt{2})-4\sqrt{2}))(6+2\sqrt{2}-5)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{\{(6)^2-(2\sqrt{2})^2\}\{(2\sqrt{2})^2-1^2\}} = \sqrt{28\cdot 7} = 14$ বর্গ একক

প্রদত্ত ত্রিভুজটি একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ। কারণ এর কোনো বাহুই অপর কোনো বাহুর সমান নয়।

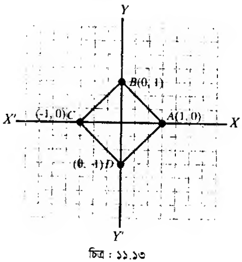
লক্ষণীয় : যে তিনটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হলো এর ১মটি সমকোণী, ২য়টি সমদ্বিবাহু ও তৃতীয়টি বিষমবাহু ত্রিভুজ। একটি মাত্র সূত্রের সাহায্যে প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব হয়েছে। অন্য যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রেও ঠিক একইভাবে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব হবে। অনুশীলনীতে এ রকম আরও কয়েকটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলসংক্রান্ত সমস্যা থাকবে।

এ পর্যায়ে আমরা চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একই সূত্র ব্যবহার করে নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করব।

উদাহরণ ১। একটি চতুর্ভুজের ৪টি শীর্ষ যথাক্রমে $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ এবং $D(0,-1)$। চতুর্ভুজটির চিত্র আঁক এবং যেকোনো দুই বাহু ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : পার্শ্বের চিত্রে বিন্দুপাতনের মাধ্যমে $ABCD$ চতুর্ভুজটি দেখানো হলো। AB, BC, CD এবং DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু এবং AC ও BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

বাহু $AB = c = \sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2}$ একক



চিত্র : ১১.১৩

বাহু $BC = a = \sqrt{(0+1)^2 + (1-0))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ একক

কর্ণ $AC = b = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$ একক

$\therefore \quad AC^2 = 4$

বাহু $CD = c = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ একক

বাহু $DA = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$ একক

দেখা যাচ্ছে, $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$ একক

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গ বা রম্বস।

এখন, $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$

$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।

$\therefore$ চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\times$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল।

এখন ত্রিভুজ ABC এর পরিসীমা, $2s = AB + AB + BC = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$ একক

$s = \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$ একক।

$\therefore$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-2)(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(\sqrt{2}+1)\cdot 1(\sqrt{2}-1)\cdot 1}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$ বর্গ একক

$= \sqrt{2-1}$ বর্গ একক

$= 1$ বর্গ একক

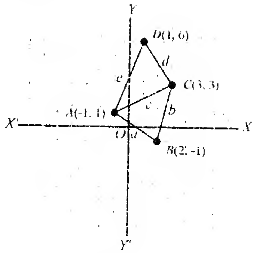
$\therefore$ চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\times 1$ বর্গ একক

$= 2$ বর্গ একক।

মন্তব্য : বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে বর্গ করেও ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। আয়ত এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ গুণ করেও ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। কিন্তু যেকোনো চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায় না।

উদাহরণ ২। $A(-1,1)$, $B(2,-1)$, $C(3,3)$ এবং $D(1,6)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি অঙ্কন করে এর প্রতিটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : বিন্দু পাতনের মাধ্যমে xy-সমতলে $ABCD$ চতুর্ভুজটি দেখানো হলো :



চিত্র : ১১.১৪

$ABCD$ চতুর্ভুজটির

বাহু, $AB = a = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ একক

বাহু, $BC = b = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$ একক

বাহু, $CD = d = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ একক

বাহু, $DA = e = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ একক

কর্ণ, $AC = c = \sqrt{(3+1)^2+(3-1)^2}$ একক

$= \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$ একক

ΔABC এ $2s = a+b+c = (\sqrt{13}+\sqrt{17}+\sqrt{20})$ একক

$= 3\cdot6056+4\cdot1231+4\cdot472$ একক

$= 12\cdot2008$

$\Rightarrow s = 6\cdot1004$ একক

ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6\cdot1004\times2\cdot4948\times1\cdot9773\times1\cdot6283}$ বর্গ একক

$= \sqrt{49\cdot000}$ বর্গ একক

$= 7$ বর্গ একক

ΔACD এ $2s = c+d+e = (\sqrt{20}+\sqrt{13}+\sqrt{29})$ একক

$= (4\cdot4721+3\cdot6056+5\cdot3852)$ একক

$= 13\cdot4429$ একক

$\therefore\ s = 6\cdot7312$ একক।

$\therefore\ \Delta ACD$ এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-e)(s-d)(s-c)}$

$= \sqrt{6\cdot7312\times2\cdot2591\times3\cdot1256\times1\cdot3460}$ বর্গ একক

$= \sqrt{63\cdot9744}$ বর্গ একক

$= 7\cdot9983$ বর্গ একক

$\therefore\ ABCD$ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (7\cdot000+7\cdot998)$ বর্গ একক

$= 14\cdot998$ বর্গ একক

$= 15$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : $ABCD$ চতুর্ভুজটি বর্গ বা আয়ত বা সামান্তরিক বা রম্বস কোনোটিই নয়। এ ধরনের বিষম আকারের জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে এ পদ্ধতি অত্যন্ত কার্যকর।

উদাহরণ ৩। চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(2,-3)$, $B(3,0)$, $C(0,1)$ এবং $D(-1,-2)$

(a) দেখাও যে, $ABCD$ একটি রম্বস।

(b) AC ও BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং $ABCD$ একটি বর্গ কিনা যাচাই কর।

(c) ত্রিভুজক্ষেত্রের মাধ্যমে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $ABCD$ চতুর্ভুজটি বিন্দুপাতনের মাধ্যমে চিত্র : ১১.১৫ এ দেখানো হলো :

(a) ধরি a, b, c, d যথাক্রমে AB, BC, CD এবং DA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং কর্ণ $AC = e$ ও কর্ণ $BD = f$.

তাহলে, $a = \sqrt{(3-2)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ একক

$b = \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ একক

$c = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ একক

$d = \sqrt{(2+1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ একক

যেহেতু $a = b = c = d = \sqrt{10}$ একক

$\therefore$ $ABCD$ একটি রম্বস বা বর্গ।

(b) কর্ণ $AC = e = \sqrt{(0-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

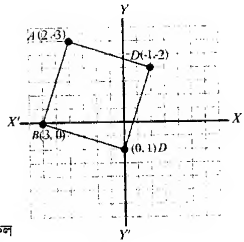
এবং কর্ণ $BD = f = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ একক

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে $AC = BD$ অর্থাৎ, কর্ণদ্বয় সমান

$$AC^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20$$

$$AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10 = 20$$

$$AC^2 = AB^2 + BD^2.$$



চিত্র : ১১.১৫

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $\angle ABC$ সমকোণ।

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গ।

$\therefore$ $ABCD$ একটি বর্গ।

(c) চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল

এখানে ΔABC এর ক্ষেত্রে

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{20}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{10} + \sqrt{5} \text{ একক।}$$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{10})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{10})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{20})} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}(\sqrt{10}-\sqrt{5})} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \sqrt{5\{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2\}} = \sqrt{5 \cdot (10-5)} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \sqrt{5 \cdot 5} = 5 \text{ বর্গ একক}$$

$\therefore$ $ABCD$ বর্গের ক্ষেত্রফল $= 2 \times 5$ বর্গ একক $= 10$ বর্গ একক।

মন্তব্য : সহজ পদ্ধতি : $ABCD$ বর্গটির ক্ষেত্রফল $(\sqrt{10})^2 = 10$ বর্গ একক।

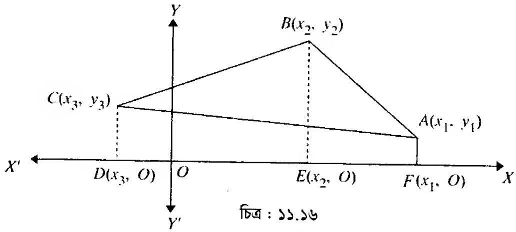
ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

পদ্ধতি ২ : শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

এই পদ্ধতিতে একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে খুব সহজেই ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। একইভাবে যেকোনো বহুভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকলেও বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব। বাস্তব ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি ব্যবহার করা সম্ভব হয় না। এর কারণ হলো আমরা যদি একটি জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে চাই এবং জমিটি যদি ত্রিকোণাকার বা চৌকোণাকার হয় তাহলে এই পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে না। যেহেতু কৌণিক বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক আমাদের জানা নাই বা জানা সম্ভব নয়। কিন্তু জমিটির বাহুর দৈর্ঘ্য আমরা সহজেই মেপে নিতে পারি এবং ১ নং পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি। তাই উভয় পদ্ধতি সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের ধারণা থাকা প্রয়োজন। ২ নং পদ্ধতির সাহায্যে ত্রিভুজ ও বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের কৌশল উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো :

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র :

ধরি, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ ত্রিভুজ ABC এর তিনটি শীর্ষবিন্দু। চিত্র ১১.১৫ এর অনুরূপ A, B ও C বিন্দু ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সাজানো।



চিত্র : ১১.১৬

চিত্র থেকে আমরা পাই,

বহুভুজ $ABCDF$ এর ক্ষেত্রফল = ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ACDF$ এর ক্ষেত্রফল
= ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $BCDE$ এর ক্ষেত্রফল

সুতরাং আমরা পাই,

ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $BCDE$ এর ক্ষেত্রফল – ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ACDF$ এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\times(BE+AF)\times EF + \frac{1}{2}\times(CD+BE)\times DE - \frac{1}{2}\times(CD+AF)\times DF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2) + \frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3) - \frac{1}{2}(y_3+y_1)(x_1-x_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

যেখানে,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

যেখানে গুণফলের দিক ↘ ধনাত্মক চিহ্ন হিসেবে নিয়ে পাওয়া গেছে $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$ এবং গুণফলের দিক ↗ ঋণাত্মক চিহ্ন হিসেবে নিয়ে পাওয়া গেছে $-x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3$

সুতরাং, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$

মন্তব্য : মনে রাখা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ যে এ পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ অবশ্যই ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিতে হবে।

উদাহরণ ১। $A(2, 3)$, $B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$ শীর্ষবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

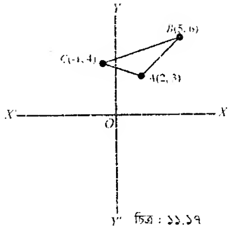
সমাধান : $A(2, 3)$, $B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$ শীর্ষ তিনটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নেওয়া হলো।

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12 + 20 - 3 - 15 + 6 - 8)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12)$ বর্গ একক

$= 6$ বর্গ একক



চিত্র : ১১.১৭

উদাহরণ ২। একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ $A(1, 3)$, $B(5, 1)$ এবং $C(3, r)$। ΔABC এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক হলে 'r' এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A(1, 3)$, $B(5, 1)$ এবং $C(3, r)$ শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & r & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(1+5r+9-15-3-r)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(4r-8) = (2r-4)$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\left|(2r-4)\right| = (2r-4) = \pm 4$

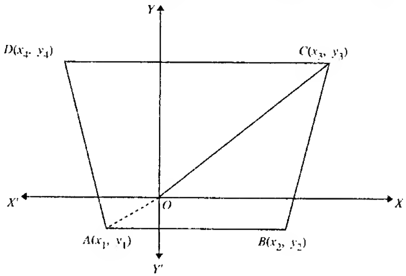
অর্থাৎ, $2r = 0$ বা, 8

$\therefore \quad r = 0$ বা, 4

উত্তর : $r = 0, 4$

চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

চিত্র ১১.১৭ এ $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। চতুর্ভুজটির চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. $C(x_3, y_3)$ এবং $D(x_4, y_4)$ এবং A, B, C, D কে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক অনুসারে নেয়া হয়েছে।



চিত্র : ১১.১৭

এখন চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

= ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল + ত্রিভুজক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1x_3)$$

$$+ \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

$$= \frac{1}{2}x_1y_2 + x_2y_3 + x_4y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

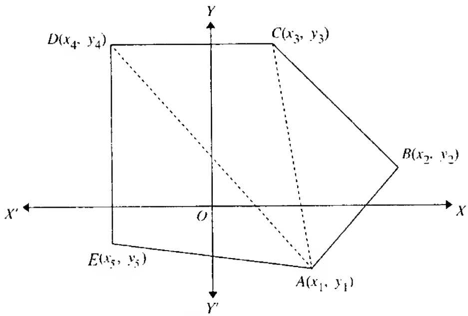
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

সুতরাং চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$

অনুরূপভাবে একটি পঞ্চভুজ $ABCDE$ (চিত্র : ১১.১৮)এর শীর্ষবিন্দুগুলো যদি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ ও $E(x_5, y_5)$ হয় এবং চিত্রের মত শীর্ষগুলো যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হয়, তবে পঞ্চভুজ $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল তিনটি ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC, ACD ও ADE এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ঠিক অনুরূপভাবে পঞ্চভুজক্ষেত্র $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 \end{vmatrix}$$

একইভাবে যেকোনো বহুভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক জানা থাকলে সহজেই উপরোক্ত পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।



চিত্র : ১১.১৮

> **কাজ :** চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতির সাহায্যে পঞ্চভুজ ও ষড়ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র প্রতিপাদন কর।

উদাহরণ ৩। $A(1, 4)$, $B(-4, 3)$, $C(1, -2)$ এবং $D(4, 0)$ শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(3+8+0+16+16-3+8-0) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(48) = 24 \text{ বর্গ একক}$$

অনুশীলনী ১১·২

১। $A(-2, 0)$, $B(5, 01)$, $C(1, 4)$ যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষবিন্দু।

(i) AB, BC এবং CA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ΔABC এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(i) $A(2, 3)$, $B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$;

(ii) $A(5, 2)$, $B(1, 6)$ এবং $C(-2, -3)$;

৩। দেখাও যে, $A(1, 1)$, $B(4, 4)$, $C(4, 8)$ এবং $D(1, 5)$ বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। AC ও BD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৪। $A(-a, 0)$, $B(0, -a)$, $C(a, 0)$ এবং $D(0, a)$ শীর্ষবিশিষ্ট $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

৫। দেখাও যে, $(0, -1)$, $(-2, 3)$, $(6, 7)$ এবং $(8, 3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬। তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$। $AB = BC$ হলে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। 'a' এর মানের সাহায্যে যে ত্রিভুজ গঠিত হয় এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৭। A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(a, a+1)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(5, -1)$। AB এর দৈর্ঘ্য AC এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হলে 'a' এর সম্ভাব্য মান এবং ত্রিভুজটির বৈশিষ্ট্য নির্ণয় কর।

৮। নিম্নোক্ত চতুর্ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [পদ্ধতি ২ ব্যবহার কর] :

(i) $(0, 0), (-2, 4), (6, 4), (4, 1)$;

(ii) $(1, 4), (-4, 3), (1, -2), (4, 0)$;

(iii) $(1, 0), (-3, 3), (4, 3), (5, 1)$;

৯। দেখাও যে, $A(2,-3), B(3,-1), C(2,0), D(-1,1)$ এবং $E(-2,-1)$ শীর্ষবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক।

১০। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ $A(3,4), B(-4,2), C(6,-1)$ এবং $D(p,3)$ এবং শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে P এর মান নির্ণয় কর।

১১·৪ সরলরেখার ঢাল (Gradient or slope of a Straight line)

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির (*Coordinate Geometry*) এই অংশের প্রথমে আমরা সরলরেখার ঢাল (Gradient or slope) বলতে কী বোঝায় এবং সরলরেখার ঢাল নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করব। ঢালের ধারণা ব্যবহার করে একটি সরলরেখার বীজগাণিতিক রূপ কী হয় তা আলোচনা করা হবে। কোনো সরলরেখা দুইটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে সেই সরলরেখার ঢালের প্রকৃতি ও উক্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করাই মূলত এই অংশের মূল আলোচনার বিষয়। দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে মিলিত হলে বা ছেদ করলে সেই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের মাধ্যমে তিনটি সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত রেখার মাধ্যমে গঠিত ত্রিভুজ নিয়েও আলোচনা করা হবে।

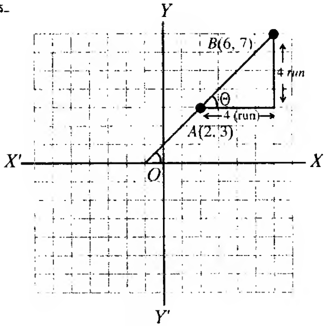
এখানে আমরা দেখাব বীজগণিতে দুই চলকের একঘাত সমীকরণ সরলরেখা নির্দেশ করে এবং এদের সমাধান হলো সেই ছেদবিন্দু।

ঢাল (Gradient or slope)

চিত্র ১১.১৯ এ AB সরলরেখাটি বিবেচনা করি। রেখাটি $A(2,3)$ ও $B(6,7)$ দুটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করেছে। চিত্রানুসারে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে। এই কোণ θ হলো অনুভূমিক x-অক্ষের সাথে AB সরলরেখাটি কী পরিমাণ আনত হয়েছে এর পরিমাপ। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে আমরা AB রেখার ঢাল (*Gradient*) m কে নিম্নোক্তভাবে পরিমাপ করে থাকি-

$$m = \frac{y \text{ স্থানাঙ্কের পরিবর্তন}}{x \text{ স্থানাঙ্কের পরিবর্তন}} = \frac{7-3}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$$

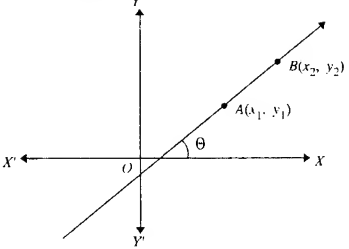
$\therefore$ AB রেখার ঢাল $(m) = 1$.



চিত্র ১১.১৯

সাধারণত, একটি সরলরেখা AB যখন $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তখন এর ঢাল (m) কে আমরা

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} \left[\frac{rise}{run}\right] = \left[\frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}}\right]$$ দ্বারা প্রকাশ করে থাকি।



বাস্তবিকপক্ষে, কোনো সরলরেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ θ ও ঢাল m এর মধ্যে সম্পর্ক হলো, $m = \tan\theta$

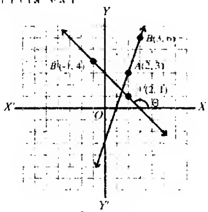
চিত্র ১১.১৯ এ AB রেখার ক্ষেত্রে সরলরেখার ঢাল $m = 1$ অর্থাৎ, $\tan\theta = 1$

বা, $\theta = 45°$ (একটি সূক্ষ্মকোণ)।

উদাহরণ ১ । নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে নির্দেশিত বিন্দুদ্বয় দ্বারা অতিক্রান্ত সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর :

(a) $A(2, 3)$ এবং $B(3, 6)$

(b) $A'(2, 1)$ এবং $B'(-1, 4)$



চিত্র : ১১.২০

সমাধান :

(a) AB রেখার ঢাল $= \frac{rise}{run} = \frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \frac{6-3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$

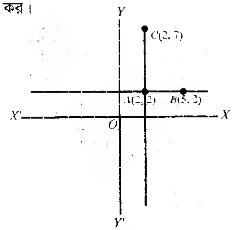
(b) $A'B'$ রেখার ঢাল $= \frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \frac{4-1}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$

লক্ষণীয় : চিত্র ১১.২০ থেকে দেখা যাচ্ছে, AB রেখার ঢাল ($Gradient$) ধনাত্মক এবং উৎপন্ন কোণ একটি সূক্ষ্মকোণ। আবার, একই চিত্র থেকে এটি পরিষ্কার যে $A'B'$ রেখার ঢাল ঋণাত্মক এবং উৎপন্ন কোণ একটি স্থূলকোণ।

সুতরাং উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, ঢাল ধনাত্মক হলে রেখা দ্বারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং ঢাল ঋণাত্মক হলে রেখা দ্বারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ একটি স্থূলকোণ।

উৎপন্ন কোণ শূন্য অথবা সমকোণ হলে ঢাল কী হবে তা নিম্নোক্ত উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো :

উদাহরণ ২। A, B এবং C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 2)$, $(5, 2)$ এবং $(2, 7)$। কার্তেসীয় তলে AB ও AC রেখা অঙ্কন কর। সম্ভব হলে AB ও AC রেখার ঢাল নির্ণয় কর।



চিত্র : ১১.২১

সমাধান : কার্তেসীয় তলে AB ও AC রেখা অঙ্কন করা হলো :
চিত্র থেকে দেখা যায় যে, AB রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং AC রেখা y-অক্ষের সমান্তরাল। AB রেখার ঢাল,

$$m = \frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \frac{2-2}{5-2} = \frac{0}{3} = 0$$

AC রেখার ঢাল $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ সূত্র দ্বারা নির্ণয় করা যাবে না, কারণ

$x_1 = x_2 = 2$ এবং $x_2 - x_1 = 0$

যদি $x_1 = x_2$ হয়, তবে রেখার ঢাল নির্ণয় করা যায় না কিন্তু রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল হয়।

সাধারণত কোনো সরলরেখা $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে

ঢাল, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

বা, $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ যদি $x_1 \neq x_2$ হয়।

লক্ষ করি : যদি $x_1 = x_2$ হয়, তাহলে রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x-অক্ষের ওপর লম্ব হয়। এই রকম লম্ব রেখা বরাবর বা খাড়া রেখা বরাবর হাঁটা সম্ভব নয়। তাই ঢাল নির্ণয় করাও সম্ভব নয়।

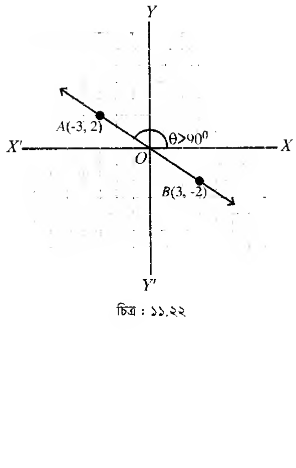
মন্তব্য : চিত্র ১১.২১ এ AB রেখার যেকোনো বিন্দুতে কোটি অর্থাৎ, $y = 2$ এবং AC রেখার যেকোনো বিন্দুতে ভুজ অর্থাৎ, $x = 2$ তাই AB সরলরেখার সমীকরণ $y = 2$ এবং AC সরলরেখার সমীকরণ $x = 2$।

উদাহরণ ৩। $A(-3, 2)$ এবং $B(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান : AB রেখার ঢাল m হলে,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \frac{2-(-2)}{-3-3} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}.$$

ঢাল ঋণাত্মক হওয়ায় রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করেছে।



চিত্র : ১১.২২

উদাহরণ ৪। $A(1, -1)$, $B(2, 2)$ এবং $C(4, t)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর মান কত ?

সমাধান : A, B ও C সমরেখ হওয়ায় AB ও BC রেখার ঢাল একই হবে। সুতরাং,আমরা পাই-

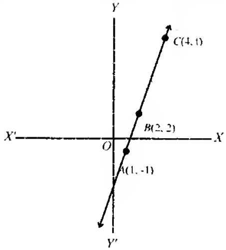
$$\frac{2+1}{2-1}=\frac{t-2}{4-2}$$

বা, $\frac{3}{1}=\frac{t-2}{2}$

বা, $t-2=6$

বা, $t=8$.

সুতরাং t এর মান 8 ।



চিত্র : ১১.২৩

উদাহরণ ৫। $A(t, 3t)$, $B(t^2, 2t)$, $C(t-2, t)$ এবং $D(1,1)$ চারটি ভিন্ন বিন্দু। AB এবং CD রেখা সমান্তরাল হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

সমাধান : AB রেখার ঢাল $m_1=\frac{2t-3t}{t^2-t}=\frac{-t}{t(t-1)}=\frac{-1}{1-t}$.

CD রেখার ঢাল $m_2=\frac{1-t}{1-t+2}=\frac{1-t}{3-t}$.

AB ও CD রেখা সমান্তরাল বলে, AB ও CD রেখার ঢাল সমান অর্থাৎ, $m_1=m_2$

বা, $\frac{-1}{1-t}=\frac{1-t}{3-t}$.

বা, $(1-t)^2=-(3-t)$

বা, $1-2t+t^2=-3+t$

বা, $t^2-3t+4=0$

বা, $t=-1$ এবং 2

সুতরাং t এর সম্ভাব্য মানসমূহ $-1,\ 2$

অনুশীলনী ১১.৩

১। নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে A ও B বিন্দুগামী সরলরেখায় ঢাল নির্ণয় কর।

(ক) $A(5,-2)$ এবং $B(2,1)$

(খ) $A(3,5)$ এবং $B(-1,-1)$

(গ) $A(t,t)$ এবং $B(t^2,t)$

(ঘ) $A(t,t+1)$ এবং $B(3t,5t+1)$

২। তিনটি ভিন্ন বিন্দু $A(t, 1)$, $B(2, 4)$ এবং $C(1, t)$ সমরেখ হলে t এর মান নির্ণয় কর।

৩। দেখাও যে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

৪। $A(1, -1)$, $B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t+3)$ সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

৫। $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2+1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল -1 হলে P এর মান নির্ণয় কর।

৬। প্রমাণ কর যে, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$ সমরেখ হবে, যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ হয়।

৭। $A(a, b)$, $B(b, a)$ এবং $C\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ সমরেখ হলে প্রমাণ কর যে, $a+b=0$.

১১·৫ সরলরেখার সমীকরণ :

ধরি, একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা 'L' দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(3, 4)$ এবং $B(5, 7)$ দিয়ে অতিক্রম করে। চিত্র ১১.২৪ এ রেখাটি দেখানো হলো।

তাহলে AB সরলরেখার ঢাল $m_1 = \frac{7-4}{5-3} = \frac{3}{2}$ ....(1)

মনে করি, $P(x, y)$ সরলরেখা L এর ওপর একটি বিন্দু। তাহলে AP রেখার ঢাল

$$m_2 = \frac{y-4}{x-3} \quad \text{..............(2)}$$

কিন্তু AP ও AB একই সরলরেখা হওয়ায় উভয়ের ঢাল সমান। অর্থাৎ,

$m_1 = m_2$

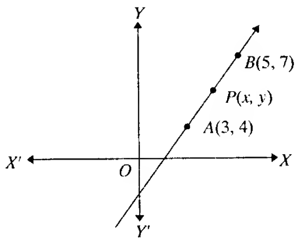
বা, $\frac{3}{2} = \frac{y-4}{x-3}$ [(1) ও (2) থেকে পাই]

বা, $3x - 9 = 2y - 8$

বা, $2y - 8 = 3x - 9$

বা, $2y = 3x - 1$

বা, $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ ....(3)



চিত্র : ১১.২৪

আবার, PB রেখার ঢাল m_3 ধরে

$$m_3 = \frac{7-y}{5-x} \quad \text{..............(4)}$$

AB এবং PB রেখার ঢাল সমান বলে [(1) ও (4) থেকে পাই]

$m_1 = m_3$

বা, $\frac{3}{2} = \frac{7-y}{5-x}$ [(1) ও (4) থেকে পাই]

বা, $15-3x=14-2y$

বা, $2y+15=3x+14$

বা, $2y=3x-1$

বা, $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ ....(5)

সমীকরণ (3) ও (5) একই সমীকরণ। সুতরাং সমীকরণ (3) বা (5) হচ্ছে সরলরেখা L এর কার্তেসীয় সমীকরণ। লক্ষ করলে দেখা যাবে সমীকরণ (3) বা (5) x এবং y এর একঘাত সমীকরণ এবং এটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। তাই নিঃসন্দেহে বলা যায় x এবং y এর একঘাত সমীকরণ সব সময় একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। সমীকরণ (3) বা (5) কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়-

$y=\frac{3}{2}x-1$ .... (3) বা (5)

$\frac{y-4}{x-3}=\frac{3}{2}$ অথবা $\frac{y-7}{x-5}=\frac{3}{2}$

অর্থাৎ, $\frac{y-4}{x-3}=\frac{7-4}{5-3}$ অথবা $\frac{y-7}{x-5}=\frac{7-4}{5-3}$

অর্থাৎ, $\frac{y-4}{x-3}=m$ অথবা $\frac{y-7}{x-5}=m$

সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায়, যদি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ কোনো সরলরেখার ওপর অবস্থিত হয়, তাহলে ঢাল

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\left[\frac{rise}{run}\right]$ বা $\left[\frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}}\right]$

এবং উক্ত সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ হবে–

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$ ....(6)

বা, $\frac{y-y_2}{x-x_2}=m$ ....(7)

সমীকরণ (6) হতে পাই-

$y-y_1=m(x-x_1)$...................(8)

সমীকরণ (7) হতে পাই,

$y-y_2=m(x-x_2)$...................(9)

$\therefore$ (8) এবং (9) হতে আমরা বলতে পারি একটি সরলরেখার ঢাল m হলে এবং রেখাটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) বা (x_2, y_2) দিয়ে অতিক্রম করলে রেখাটির কার্তেসীয় সমীকরণ (8) অথবা (9) দ্বারা নির্ণয় করা যাবে।

অপর সমীকরণ (6) এবং (7) হতে আমরা পাই-

$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}$.................(10)

সমীকরণ (10) হতে স্পষ্টভাবে বলা যায়, একটি সরলরেখা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দিয়ে অতিক্রম করলে এর কার্তেসীয় সমীকরণ হবে

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \text{বা} \quad \frac{y-y_2}{x-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{.............}(11)$$

যেহেতু, $m = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

উপরোক্ত আলোচনা নিম্নোক্ত উদাহরণসমূহের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো যাতে শিক্ষার্থীরা সরলরেখার ঢাল ও সমীকরণ সহজেই বুঝতে পারে।

উদাহরণ ১। $A(3, 4)$ ও $B(6, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : AB রেখার ঢাল $m = \dfrac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \dfrac{7-4}{6-3} = \dfrac{3}{3} = 1$

সমীকরণ (8) ব্যবহার করে AB রেখার সমীকরণ

$y - 4 = 1(x-3)$

বা, $y - 4 = x - 3$

বা, $y = x + 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ .... (8)

সমীকরণ (9) ব্যবহার করে AB রেখার সমীকরণ

$y - 7 = 1(x-6)$

বা, $y = x + 1$

$y - y_2 = m(x - x_2)$ ....(9)

সমীকরণ (11) ব্যবহার করে AB রেখার সমীকরণ

$\dfrac{y-4}{x-3} = \dfrac{4-7}{3-6}$

বা, $\dfrac{y-4}{x-3} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

বা, $y - 4 = x - 3$

বা, $y = x + 1$

লক্ষণীয় : সূত্র (8) বা (9) বা (11) যেকোনোটি ব্যবহার করে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। শিক্ষার্থীগণ সুবিধামতো যেকোনোটি ব্যবহার করতে পারবে।

উদাহরণ ২। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ঢাল 3 এবং রেখাটি $(-2, -3)$ বিন্দুগামী। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ঢাল $m = 3$

নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1) = (-2, -3)$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ,

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

বা, $y - (-3) = 3\{x - (-2)\}$

বা, $y + 3 = 3(x + 2)$

বা, $y = 3x + 3$

উদাহরণ ৩। সরলরেখা $y = 3x + 3$ নির্দিষ্ট বিন্দু $P(t, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রেখাটি x এবং y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : $P(t, 4)$ বিন্দুটি $y = 3x + 3$ রেখার ওপর অবস্থিত হওয়ায় P বিন্দুর স্থানাঙ্ক রেখার সমীকরণকে সিদ্ধ (satisfy) করবে।

অর্থাৎ $4 = 3.t + 3$

বা, $3t = 4 - 3$

বা, $t = \frac{1}{3}$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(t, 4) = P\left(\frac{1}{3}, 4\right)$.

$y = 3x + 3$ রেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে। কাজেই A বিন্দুর কোটি বা y স্থানাঙ্ক 0 [যেহেতু x অক্ষের সকল বিন্দুতে y এর মান শূন্য।]

$\therefore$ $0 = 3x + 3$

বা, $x = -1$.

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 0)$.

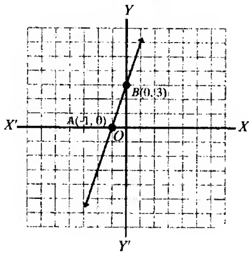
আবার, $y = 3x + 3$ রেখাটির y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করায় B বিন্দুর ভুজ বা x স্থানাঙ্ক 0। [যেহেতু y অক্ষের সকল বিন্দুতে x এর মান শূন্য]

$\therefore$ $y = 3 \cdot 0 + 3$

বা, $y = 3$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 3)$

এখন কার্তেসীয় তলে AB রেখাটি অঙ্কন করি।



চিত্র : ১১.২৫

AB রেখাটি x অক্ষকে $(-1, 0)$ বিন্দুতে এবং y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। অর্থাৎ, x এর মান যখন -1 তখন $y = 3x + 3$ রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করেছে। আবার y এর মান যখন 3 তখন রেখাটি y অক্ষকে ছেদ করেছে। সুতরাং রেখাটির x ছেদক -1 এবং y ছেদক 3।

উল্লম্বিক নয় (Non Vertical) এমন সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে নিম্নোক্তরূপে প্রকাশ করা হয়।

$$\boxed{y = mx + c}$$

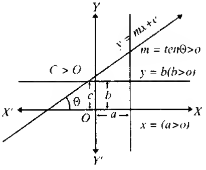
এখানে m রেখাটির ঢাল এবং c, y অক্ষের ছেদকাংশ। $m > 0$ এবং $c > 0$ এর জন্য রেখাটি ১১.২৬ চিত্রে দেখানো হলো।

আবার y অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ, x অক্ষের ওপর লম্বরেখার সাধারণ সমীকরণ $x = a$। চিত্র ১১.২৬

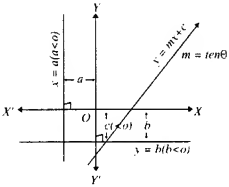
একইভাবে x অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ, y অক্ষের ওপর লম্বরেখার সাধারণ সমীকরণ $y = b$ চিত্র ১১.২৬

লক্ষণীয় 'c' এর মান ধনাত্মক হওয়ায় $y = mx + c$ রেখাটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে c একক দূরে ছেদ করেছে। m এর মান ধনাত্মক ($m = \tan\theta > 0$) হওয়ায় $y = mx + c$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণটি সূক্ষ্মকোণ। 'a' ও 'b' এর মান ধনাত্মক হওয়ায় $x = a$ রেখাটি y অক্ষের ডান দিকে এবং $y = b$ রেখাটি x অক্ষের উপরে দেখানো হয়েছে।

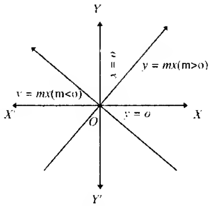
$'a'$, $'b'$ ও $'c'$ এর ঋণাত্মক মানের বেলায় রেখাগুলোর অবস্থান ১১.২৭ চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র : ১১.২৬



চিত্র : ১১.২৭



চিত্র : ১১.২৮

চিত্র ১১.২৬ ও ১১.২৭ এবং উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা স্পষ্ট করেই বলতে পারি $c=0$ হলে $y=mx$ রেখাটি মূলবিন্দু $(0,0)$ দিয়ে যাবে, $a=0$ হলে রেখাটি y অক্ষ এবং $b=0$ হলে রেখাটি x অক্ষ। চিত্র ১১.২৮

সুতরাং x অক্ষের সমীকরণ $y=0$

এবং y অক্ষের সমীকরণ $x=0$

উদাহরণ ৪। $y-2x+3=0$ রেখার ঢাল ও y অক্ষের ছেদকাংশ নির্ণয় কর। কার্তেসীয় তলে রেখাটি এঁকে দেখাও।

সমাধান : $y-2x+3=0$

বা, $y=2x-3$ [$y=mx+c$ আকার]

$\therefore$ ঢাল $m=2$

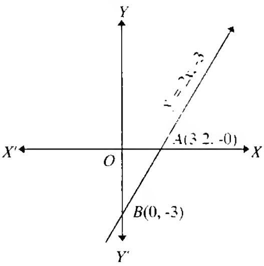
y অক্ষের ছেদকাংশ $c=-3$

এখন রেখাটি x ও y অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে পাই,

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2},0\right)$ [x অক্ষে $y=0$ বসিয়ে $x=\frac{3}{2}$]

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-3)$ [y অক্ষে $x=0$ বসিয়ে $(y=-3)$]

কার্তেসীয় তলে রেখাটি এঁকে দেখানো হলো।



চিত্র : ১১.২৯

উদহারণ ৫। $A(-1,3)$ এবং $B(5,15)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা x-অক্ষ ও y অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : AB রেখার সমীকরণ $\frac{y-3}{x+1}=\frac{3-15}{-1-5}=\frac{-12}{-6}=2$

বা, $y-3=2x+2$

বা, $y=2x+5$............(1)

(1) হতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 5)$

$\therefore$ PQ রেখার সমীকরণ

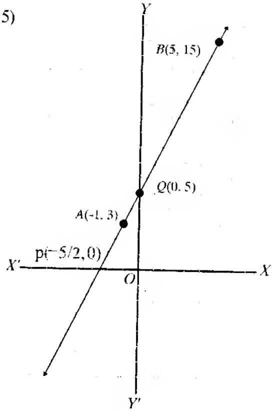
$$\frac{y-0}{x+\frac{5}{2}} = \frac{0-5}{\frac{-5}{2}-0}$$

বা, $\frac{2y}{2x+5} = \frac{10}{5}$

বা, $2y = 4x+10$

বা, $y = 2x+5$

মন্তব্য : AB এবং PQ একই সরলরেখা।



চিত্র : ১১.৩০

PQ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\left(\frac{-5}{2}-0\right)^2 + (0-5)^2}$

$= \sqrt{\frac{25}{4}+25} = \sqrt{\frac{125}{4}}$

$= \frac{5\sqrt{5}}{2}$ একক

অনুশীলনী ১১.৪

১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়ে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্য নেওয়া হয়।

ii $y - 2x + 5 = 0$ রেখার ঢাল 2

iii $3x + 5y = 0$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী

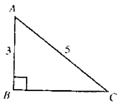
নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i
খ. ii ও iii
গ. i ও iii
ঘ. i, ii ও iii

২। $\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$ -এ s দ্বারা বোঝায়–

ক. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
খ. বৃত্তের ক্ষেত্রফল
গ. ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা
ঘ. বৃত্তের অর্ধপরিধি

৩।



ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

ক. 12 বর্গ একক
খ. 15 বর্গ একক
গ. 6 বর্গ একক
ঘ. 60 বর্গ একক

৪।

$A(1,1)$ ——— $B(3,-3)$

AB রেখার ঢাল

ক. 2 খ. -2

গ. 0 ঘ. 6

৫। $x - 2y - 10 = 0$ এবং $2x + y - 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল

ক. -2 খ. 2

গ. -2 ঘ. -1

৬। $y = \frac{x}{2} + 2$ এবং $2x - 10y + 20 = 0$ সমীকরণদ্বয়

ক. দুইটি ভিন্ন রেখা নির্দেশ করে খ. একই রেখা নির্দেশ করে

গ. রেখাদ্বয় সমান্তরাল ঘ. রেখাদ্বয় পরস্পরচ্ছেদী

৭। $y = x - 3$ এবং $y = -x + 3$ এর ছেদবিন্দু

ক. $(0, 0)$ খ. $(0, 3)$

গ. $(3, 0)$ ঘ. $(-3, 3)$

নিচের তথ্যের আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x = 1, y = 1$

৮। রেখাদ্বয় x অক্ষকে যে বিন্দু ছেদ করে এর স্থানাঙ্ক

ক. $(0, 1)$ খ. $(1, 0)$

গ. $(0, 0)$ ঘ. $(1, 1)$

৯। রেখাদ্বয় অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ক্ষেত্রটি তৈরি করে এর ক্ষেত্রফল

ক. $\frac{1}{2}$ বর্গ একক খ. 1 বর্গ একক

গ. 2 বর্গ একক ঘ. 4 বর্গ একক

১০। একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল 2.

১১। নিম্নোক্ত বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) $A(1, 5),\ B(2, 4)$

(b) $A(3, 0),\ B(0, -3)$

(c) $A(a, o),\ B(2a, 3a)$

১২। নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) ঢাল 3 এবং y ছেদক -5

(b) ঢাল -3 এবং y ছেদক -5

(c) ঢাল 3 এবং y ছেদক 5

(d) ঢাল -3 এবং y ছেদক 5

উপরোক্ত চাররেখা একই সমতলে এঁকে দেখাও।

[এই রেখাসমূহের মাধ্যমে ঢাল বোঝা যাবে এবং y-অক্ষরে ছেদকাংশের চিহ্নের জন্য রেখা কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করবে]

১৩। নিম্নোক্ত রেখাসমূহ x অক্ষকে ও y অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে নির্ণয় কর। তারপর রেখাসমূহ এঁকে দেখাও।
(a) $y = 3x - 3$

(b) $2y = 5x + 6$

(c) $3x - 2y - 4 = 0$

১৪। $(k, 0)$ বিন্দুগামী ও k ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ k এর মাধ্যমে নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(5, 6)$ বিন্দুগামী হয় তবে k এর মান নির্ণয় কর।

১৫। $(k^2, 2k)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{k}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(-2, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তবে k এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

১৬। একটি রেখা $A(-2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় যার ঢাল $\frac{1}{2}$। আবার রেখাটি যদি $(3, k)$ বিন্দু দিয়ে যায় তবে k এর মান কত ?

১৭। 3 ঢালবিশিষ্ট একটি রেখা $A(-1, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুকে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য একটি রেখা x অক্ষকে $C(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(a) AB ও AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
(a) ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৮। দেখাও যে, $y - 2x + 4 = 0$ এবং $3y = 6x + 10$ রেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করে না। রেখাদ্বয়ের চিত্র এঁকে ব্যাখ্যা কর কেন সমীকরণ দুইটির সমাধান নাই।

১৯। $y = x + 5$, $y = -x + 5$ এবং $y = 2$ সমীকরণ তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। ত্রিভুজটির চিত্র আঁক এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২০। $y = 3x + 4$ এবং $3x + y = 10$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রেখাদ্বয়ের চিত্র আঁক এবং x অক্ষ সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১। প্রমাণ কর যে, $2y - x = 2$, $y + x = 7$ এবং $y = 2x - 5$ রেখা তিনটি সমবিন্দু (Concurrent) অর্থাৎ একই বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

২২। $y = x + 3$, $y = x - 3$, $y = -x + 3$ এবং $y = -x - 3$ একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজটি আঁক এবং ক্ষেত্রফল তিনটি ভিন্ন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

২৩। দেওয়া আছে,
$3x + 2y = 6$
ক. প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।
খ. অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর এবং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
গ. অক্ষদ্বয় এবং রেখাটিকে ধার বিবেচনা করে এর ওপর একটি 5 একক উচ্চতাবিশিষ্ট ঘনবস্তু তৈরি করা হলো যার শীর্ষ মূলবিন্দুর উপরে। ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

২৪। দেওয়া আছে, $A(1, 4a)$ এবং $B(5, a^2 - 1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= -1$
ক. দেখাও যে, a এর দুইটি মান রয়েছে।
খ. a এর মানদ্বয়ের জন্য যে চারটি বিন্দু পাওয়া যায়, ধর এরা P, Q, R ও S. PQRS-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
গ. চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত? এ ব্যাপারে তোমার মতামত যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর।

দ্বাদশ অধ্যায়

সমতলীয় ভেক্টর

আমরা স্কেলার রাশি এবং এর ওপর বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক প্রক্রিয়ার প্রয়োগ শিখেছি। কিন্তু শুধু স্কেলার রাশি সম্পর্কে ধারনা থাকলেই দৈনন্দিন জীবনের অনেক কার্যক্রম ব্যাখা করা যায় না। এক্ষেত্রে আমাদের ভেক্টর রাশির ধারণা প্রয়োজন হয়। এই অধ্যায়ে আমরা ভেক্টর রাশি সম্পর্কে আলোচনা করব।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি বর্ণনা করতে পারবে।
- স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি প্রতীকের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমান ভেক্টর, বিপরীত ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টরের যোগ ও যোগবিধি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টরের বিয়োগ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক ও একক ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক ও বন্টনবিধি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টরের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

১২.১। স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সবক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। 5 সে.মি., 3 মিনিট, 12 টাকা, 5 লিটার, $6°C$ ইত্যাদি দ্বারা যথাক্রমে বস্তুর দৈর্ঘ্য, সময়ের পরিমাণ, টাকার পরিমাণ, আয়তনের পরিমাণ ও তাপমাত্রার পরিমাণ বোঝানো হয়। এসব পরিমাপের জন্য কেবল এককসহ পরিমাণ উল্লেখ করলেই চলে। আবার যদি বলা হয় একটি লোক একবিন্দু থেকে যাত্রা করে প্রথমে 4 মি. ও পরে 5 মি. গেল, তাহলে যাত্রাবিন্দু থেকে তার দূরত্ব নির্ণয় করতে গেলে প্রথমে জানা দরকার লোকটির গতির দিক কী? গতির সঠিক দিক না জানা পর্যন্ত যাত্রাবিন্দু থেকে লোকটি কতদূর গিয়েছে তা সঠিকভাবে নির্ণয় সম্ভব নয়।

যে রাশি কেবল এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বোঝানো যায়, একে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়। দৈর্ঘ্য, ভর, আয়তন, দ্রুতি, তাপমাত্রা ইত্যাদি প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।

যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য এর পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, একে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়। সরণ, বেগ, ত্বরণ, ওজন, বল ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

১২.২। ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপঃ দিক নির্দেশক রেখাংশ

কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে আদিবিন্দু (initial point) এবং অপর প্রান্তকে অন্তঃবিন্দু (terminal point) হিসেবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখা (directed line segment) বলা হয়। কোনো দিক নির্দেশক রেখাংশের আদি বিন্দু A এবং অন্তঃবিন্দু B হলে ঐ দিক নির্দেশক রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা

হয়। প্রত্যেক দিক নির্দেশক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশি, যার পরিমাণ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্য ($|\overrightarrow{AB}|$ বা সংক্ষেপে AB দ্বারা সূচিত) এবং যার দিক A বিন্দু হতে AB রেখা বরাবর B বিন্দু নির্দেশকারী দিক।

বিপরীতক্রমে, যেকোনো ভেক্টর রাশিকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে রেখাংশটির দৈর্ঘ্য রাশিটির পরিমাণ এবং রেখাংশটির আদিবিন্দু হতে অন্তঃবিন্দু নির্দেশকারী দিক প্রদত্ত ভেক্টর রাশির দিক।

তাই, ভেক্টর রাশি ও দিক নির্দেশক রেখাংশ সমার্থক ধারণা। দিক নির্দেশককে জ্যামিতিক ভেক্টর বলেও উল্লেখ করা হয়। আমাদের আলোচনা একই সমতলে অবস্থিত ভেক্টরের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

ধারক রেখা ঃ কোনো ভেক্টর (দিক নির্দেশক রেখাংশ) যে অসীম সরলরেখার অংশবিশেষ, একে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা শুধু ধারক (support) বলা হয়।

সচরাচর একটি ভেক্টরকে একটি অক্ষর দিয়ে সূচিত করা হয়:

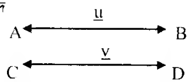
যেমন $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ কিন্তু, $\overrightarrow{AB}$ লিখলে যেমন বোঝা যায় যে, ভেক্টরটির আদিবিন্দু A ও অন্তবিন্দু B, $\underline{u}$ লিখলে তেমন কোনো তথ্য পাওয়া যায় না।

কাজ: ১। তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে 3 কি. মি. দূরে অবস্থিত। বাড়ি হতে হেঁটে স্কুলে যেতে এক ঘণ্টা সময় লাগলে তোমার গতিবেগ কত?

২। স্কুল ছুটির পর সাইকেলে 20 মিনিটে বাড়ি এলে এক্ষেত্রে তোমার গতিবেগ কত?

১২.৩। ভেক্টরের সমতা, বিপরীত ভেক্টর

সমান ভেক্টর ঃ একটি ভেক্টর $\underline{u}$ -কে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ -এর সমান বলা হয়, যদি



(i) $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ ($\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য)

(ii) $\underline{u}$ -এর ধারক, $\underline{v}$ -এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয়,

(iii) $\underline{u}$ -এর দিক $\underline{v}$ -এর দিকের সঙ্গে একমুখী হয়। সমতার এই সংজ্ঞা যে নিচের নিয়মগুলো মেনে চলে, তা সহজেই বোঝা যায় :

(১) $\underline{u} = \underline{v}$

(২) $\underline{u} = \underline{v}$ হলে $\underline{v} = \underline{u}$

(৩) $\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{v} = \underline{w}$ হলে $\underline{u} = \underline{w}$

$\underline{u}$ -এর ধারক এবং $\underline{v}$ -এর ধারক রেখাদ্বয় অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, আমরা সংক্ষেপে বলব যে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর।

দ্রষ্টব্য ঃ যেকোনো বিন্দু থেকে প্রদত্ত যেকোনো ভেক্টরের সমান করে একটি ভেক্টর টানা যায়।

কেননা, বিন্দু P এবং ভেক্টর $\underline{u}$ দেওয়া থাকলে, আমরা P বিন্দু দিয়ে $\underline{u}$ এর ধারকের সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা টানি, তারপর P বিন্দু থেকে $\underline{u}$ এর দিক বরাবর ($\underline{u}$) এর সমান করে PQ রেখাংশ কেটে নিই। তাহলে অঙ্কন অনুযায়ী $\overrightarrow{PQ} = \underline{u}$ হয়।

বিপরীত ভেক্টর : $\underline{v}$ কে $\underline{u}$ -এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয়, যদি

(i) $|\underline{v}| = |\underline{u}|$

(ii) $\underline{v}$ -এর ধারক, $\underline{u}$ -এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়।

(iii) $\underline{v}$ -এর দিক $\underline{u}$ -এর দিকের বিপরীত হয়।

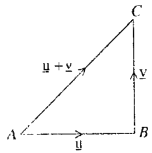
$\underline{v}$ যদি $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হয়, তবে $\underline{u}$ হবে $\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর। সমতার সংজ্ঞা থেকে বোঝা যায় যে, $\underline{v}$ এবং $\underline{w}$ প্রত্যেকে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বোঝাতে $-\underline{u}$ হয়।

$\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ হলে $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$

১২.৪। ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

১। (ক) ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি

ভেক্টর যোগের সংজ্ঞা ঃ কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u}+\underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বোঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।

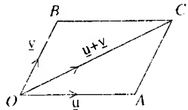


মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ এরূপ দুইটি ভেক্টর যে, $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু। তাহলে $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দুর সংযোজক $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি বলা হয় এবং $\underline{u}+\underline{v}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u}+\underline{v}$ ভেক্টরত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত যোজন পদ্ধতিকে ত্রিভুজবিধি বলা হয়।

(খ) ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধির অনুসিদ্ধান্ত হিসেবে ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি নিম্নরূপঃ কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u}+\underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়।



প্রমাণ ঃ মনে করি, যেকোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা সূচিত হয়েছে।

$OACB$ সামান্তরিক ও এর $\overrightarrow{OC}$ কর্ণ অঙ্কন করি।

তাহলে ঐ সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর যোগফল সূচিত হবে।

অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \underline{u}+\underline{v}$ (ভেক্টর স্থানান্তরের মাধ্যমে)

$OACB$ সামান্তরিকের OB ও AC সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \underline{v}$ (ভেক্টর স্থানান্তরের মাধ্যমে)

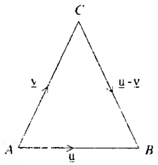
$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

দ্রষ্টব্য ঃ (১) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে এদের লব্ধিও বলা হয়। বল বা বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হয়।

(২) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়, কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

২। ভেক্টরের বিয়োগ ঃ

$\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল $\underline{u} - \underline{v}$ বলতে $\underline{u}$ এবং $(-\underline{v})$ ($\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর) ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল $\underline{u} + (-\underline{v})$ বোঝায়।



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি

$\underline{u} = \overrightarrow{AB}, \underline{v} = \overrightarrow{AC}$ হলে $\underline{u} - \underline{v} = \overrightarrow{CB}$; অর্থাৎ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

কথায় ঃ $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু একই হলে $\underline{u} - \underline{v}$ সেই ভেক্টর, যার আদিবিন্দু হচ্ছে $\underline{v}$ এর অন্তবিন্দু এবং যার অন্তবিন্দু হচ্ছে $\underline{u}$ এর অন্তবিন্দু।

সংক্ষেপে ঃ একই আদিবিন্দুবিশিষ্ট দুইটি ভেক্টরের বিয়োগফল হচ্ছে অন্তবিন্দুদ্বয় দ্বারা বিপরীতক্রমে গঠিত ভেক্টর।

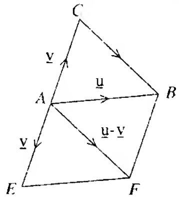
প্রমাণ : CA রেখাংশকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $AE = CA$ হয়। $AEFB$ সামান্তরিক গঠন করি। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি অনুযায়ী, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$

আবার $AFBC$ একটি সামান্তরিক, কেননা $BF = AE = CA$ এবং $BF \parallel AE$ বলে $BF \parallel CA$.

$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$ (ভেক্টর স্থানান্তর),

কিন্তু $\overrightarrow{AE} = -\underline{v}$ এবং $AB = \underline{u}$

সুতরাং $\underline{u} + (-\underline{v}) = \overrightarrow{CB}$ (প্রমাণিত হলো।)



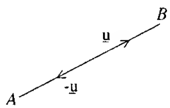
৩। শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না একে শূন্য ভেক্টর বলে।

$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর হলে $\underline{u} + (-\underline{u})$ কী হবে?

ধরি, $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ তখন $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$: ফলে

$\underline{u} + (-\underline{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{AA}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী)



কিন্তু $\overrightarrow{AA}$ কী ধরনের ভেক্টর? এটি একটি বিন্দু ভেক্টর, অর্থাৎ এর আদিবিন্দু ও অন্তবিন্দু একই বিন্দু; সুতরাং দৈর্ঘ্য শূন্য।

অর্থাৎ $\overrightarrow{AA}$ দ্বারা A বিন্দুকেই বুঝতে হবে। এরূপ ভেক্টর (যার দৈর্ঘ্য শূন্য) কে শূন্য ভেক্টর বলা হয় এবং $\underline{0}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। এই একমাত্র ভেক্টর যার কোনো নির্দিষ্ট দিক বা ধারক রেখা নেই।

শূন্য ভেক্টরের অবতারণার ফলে আমরা বলতে পারি যে, $\underline{u}+(-\underline{u})=\underline{0}$

এবং $\underline{u}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{u}=\underline{u}$

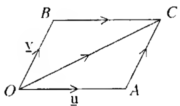
বস্তুত শূন্য ভেক্টরের সঙ্গে শেষোক্ত অভেদ নিহিত রয়েছে।

১২.৫। ভেক্টর যোগের বিধিসমূহ

১। ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি (Commutative Law)

যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $\overrightarrow{OA}=\underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\underline{v}$, $OACB$ সামান্তরিক ও এর কর্ণ OC অঙ্কন করি। OA ও BC সমান ও সমান্তরাল এবং OB ও AC সমান ও সমান্তরাল।



$\therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$

আবার, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\underline{v}+\underline{u}$

$\therefore \underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$

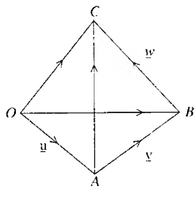
$\therefore$ ভেক্টর যোজন বিনিময় বিধি সিদ্ধ করে।

ভেক্টর যোজনের সংযোগ বিধি (Associative Law)

যেকোনো $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{OA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{w}$

অর্থাৎ $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{v}$ এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{w}$ অঙ্কন করা হয়েছে। O, C এবং A, C যোগ করি।



তাহলে $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$

আবার, $\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$

$\therefore (\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

সুতরাং ভেক্টর যোজন সংযোগ বিধি সিদ্ধ করে।

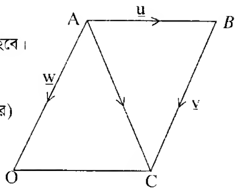
অনুসিদ্ধান্ত : কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর একই ক্রম দ্বারা সূচিত ভেক্টরত্রয়ের যোগফল শূন্য।

উপরের চিত্রে, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}=\left(-\overrightarrow{AO}\right)$

$\therefore \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$

৩। ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি (Cancellation Law)

যেকোনো $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$ হলে, $\underline{v}=\underline{w}$ হবে।



প্রমাণ ঃ এখানে $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$

$\therefore \underline{u}+\underline{v}+(-\underline{u})=\underline{u}+\underline{w}+(-\underline{u})$ (উভয়পক্ষে $-\underline{u}$ যোগ করে)

বা, $\underline{u}-\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}-\underline{u}+\underline{w}$

$\therefore\ \underline{v}=\underline{w}$

১২.৬। ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a vector)

$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে $m\underline{u}$ দ্বারা কোনো ভেক্টর বোঝায়, নিচে তা ব্যাখ্যা করা হল:

(১) $m=0$ হলে, $m\underline{u}=0$,

(২) $m\neq 0$ হলে, $m\underline{u}$ এর ধারক $\underline{u}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন;

$m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্যের m গুণ এবং

(ক) $m>0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সংগে একমুখী

(খ) $m<0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত।

দ্রষ্টব্য ঃ (১) $m=0$ অথবা $\underline{u}=\underline{0}$ হলে

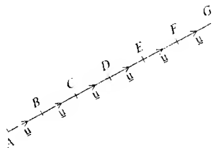
$m\underline{u}=\underline{0}$

(২) $1\underline{u}=\underline{u}$, $(-1)\underline{u}=-\underline{u}$

উপরিউক্ত সংজ্ঞা হতে দেখা যায়, $m(n\underline{u})=n(m\underline{u})=mn(\underline{u})$

m, n এর উভয়ে >0, উভয়ে <0, একটি >0 অপরটি <0, একটি বা উভয় 0, এ সকল ক্ষেত্রেও পৃথক পৃথক ভাবে বিবেচনা করে সহজেই সূত্রটির বাস্তবতা সম্পর্কে নিশ্চিত হওয়া যায়। নিচে এর একটি উদাহরণ দেয়া হলো:

মনে করি, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\underline{u}$



AC কে G পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করি যেন

$CD=DE=EF=FG=AB$ হয়।

তখন $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}$

$=\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}=6\underline{u}$

অন্যদিকে $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EG}$

$=2\underline{u}+2\underline{u}+2\underline{u}$

$=3(2\underline{u})$

এবং $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=3\underline{u}+3\underline{u}=2(3\underline{u})$

$\therefore\ 2(3\underline{u})=3(2\underline{u})=6\underline{u}$

দ্রষ্টব্য : দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, এদের একটিকে অপরটির সাংখ্যগুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।

বাস্তবে $AB \| CD$ হলে,

$\overline{AB} = m\overline{CD}$, যেখানে, $|m| = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \dfrac{AB}{CD}$

$m > 0$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী হয়,

$m < 0$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী হয়।

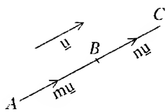
১২.৭। ভেক্টরের সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত বণ্টন সূত্র

(Distributive laws concerning scalar multiples of vectors)

m, n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{u}$, $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে,

(১) $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

(২) $m(\underline{u}+\underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$



প্রমাণ : (১) m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = m|\underline{u}|$

AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $|\overrightarrow{BC}| = n|\underline{u}|$ হয়।

$\therefore \overrightarrow{BC} = n\underline{u}$ এবং

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = m|\underline{u}| + n|\underline{u}| = (m+n)|\underline{u}|$

$\therefore \overrightarrow{AC} = (m+n)\underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore m\underline{u} + n\underline{u} = (m+n)\underline{u}$

m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m+n||\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক, তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m||\underline{u}| + |n||\underline{u}| = (|m| + |n|)|\underline{u}|$ [$\because m\underline{u}$, $n\underline{u}$ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে কাজ করে] এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। কিন্তু $m < 0$ এবং $n < 0$ হওয়ায় $|m| + |n| = |m+n|$, সেহেতু এক্ষেত্রে $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ পাওয়া গেল।

সর্বশেষে m এবং n এর মধ্যে প্রথমটি > 0, অপরটি < 0 হলে $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m+n||\underline{u}|$ এবং দিক হবে

(ক) $\underline{u}$ এর দিকের সাথে একমুখী যখন $|m| > |n|$

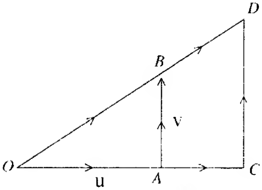
(খ) $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক যখন $|m| < |n|$

তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটিও দৈর্ঘ্যে ও দিকে $(m+n)\underline{u}$ এর সাথে একমুখী হবে।

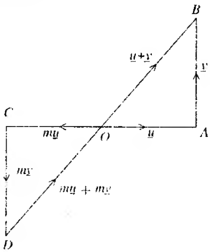
দ্রষ্টব্য : তিনটি বিন্দু A, B, C সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ এর সাংখ্যগুণিতক হয়।

মন্তব্য: (১) দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হলে এবং এদের দিক একই হলে, এদের সদৃশ (similar) ভেক্টর বলা হয়।

(২) যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য ১ একক, একে (দিক নির্দেশক) একক ভেক্টর বলা হয়।



চিত্র-১



চিত্র-২

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $OC = m.OA$ হয়। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

সেহেতু $\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

$\therefore \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

চিত্র-১ এ m ধনাত্মক, চিত্র-২ এ m ঋণাত্মক।

$\therefore OC = m.OA, CD = m.AB, OD = m.OB$

এক্ষণে $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ বা, $m\left(\overrightarrow{OA}\right) + m\left(\overrightarrow{AB}\right) = m\left(\overrightarrow{OB}\right)$

$\therefore m\underline{u} + m\underline{v} = m(\underline{u} + \underline{v})$

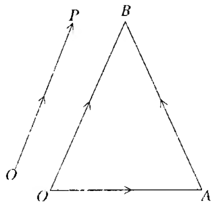
দ্রষ্টব্য : m এর সকল মানের জন্য উপরোক্ত সূত্র সত্য।

কাজ: m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই কর।

১২.৮। অবস্থান ভেক্টর (Position Vector)

সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট O বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টরের মূলবিন্দু (origin) বলা হয়।

মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে উৎপন্ন $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরকে O বিন্দুর পরিপ্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর প্রেক্ষিতে একই সমতলে অপর B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$. A, B যোগ করি।



মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ অর্থাৎ $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

সুতরাং, দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর জানা থাকলে এদের সংযোজক রেখা দ্বারা সূচিত ভেক্টর ঐ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর থেকে আদিবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বিয়োগ করে পাওয়া যাবে।

দ্রষ্টব্য : মূলবিন্দু ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানে থাকলে একই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। কোনো নির্দিষ্ট প্রতিপাদ্য বিষয়ের সমাধানে এ বিষয়ের বিবেচনাধীন সকল বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ধরা হয়।

কাজ : তোমার খাতায় একটি বিন্দুকে মূলবিন্দু O ধরে বিভিন্ন অবস্থানে আরও পাঁচটি বিন্দু নিয়ে O বিন্দুর সাপেক্ষে এগুলোর অবস্থান ভেক্টর চিহ্নিত কর।

১২.৯। কতিপয় উদাহরণ

উদাহরণ ১। দেখাও যে, (ক) $-(-\underline{a}) = \underline{a}$

(খ) $-m(\underline{a}) = m(-\underline{a}) = -m\underline{a}$, m একটি স্কেলার।

(গ) $\dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ একটি একক ভেক্টর, যখন $\underline{a} \neq \underline{0}$

সমাধান : (ক) বিপরীত ভেক্টরের ধর্ম অনুযায়ী $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

আবার $(-\underline{a}) + (-(-\underline{a})) = \underline{0}$

$\therefore -(-\underline{a}) + (-\underline{a}) = \underline{a} + (-\underline{a})$

$\therefore -(-\underline{a}) = \underline{a}$ [ভেক্টর যোগের বর্জনবিধি]

(খ) $m\underline{a} + (-m)\underline{a} = \{m + (-m)\}\underline{a} = 0\underline{a} = \underline{0}$

$\therefore (-m)\underline{a} = -m\underline{a}$ (1)

আবার $m\underline{a}+m(-\underline{a})=m[\underline{a}+(-\underline{a})]=m\underline{0}=\underline{0}$

$\therefore m(-\underline{a})=-m\underline{a} \quad (2)$

(1) এবং (2) থেকে $(-m)\underline{a}=m(-\underline{a})=-m\underline{a}$

(গ) মনে করি $\underline{a}$ অশূন্য $\hat{\underline{a}}$ হয়। ভেক্টরের দিক বরাবর $\hat{\underline{a}}$ একটি একক ভেক্টর এবং $\underline{a}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য a অর্থাৎ $|\underline{a}|=a$

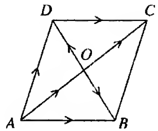
তাহলে $\underline{a}=(a)\ \hat{\underline{a}}=|\underline{a}|\ \hat{\underline{a}}$; এখানে $|\underline{a}|=a$ একটি স্কেলার যা অশূন্য কারণ $\underline{a}\neq\underline{0}$

$\therefore \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}=\dfrac{|\underline{a}|\hat{\underline{a}}}{|\underline{a}|}=\hat{\underline{a}}$ একটি একক ভেক্টর।

উদাহরণ ২। ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD।

(ক) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।



সমাধান : (ক) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

আবার, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ বা $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

(খ) যেহেতু সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়,

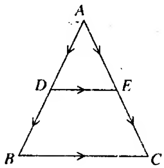
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$

উদাহরণ ৩। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।

সমাধান : মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE=\frac{1}{2}BC$



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DE}$................(1)

এবং $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$

[$\because$ D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ থেকে পাই

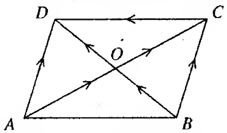
$2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ অর্থাৎ $2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$, [(1) হতে]

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

আবার $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা $DE = \frac{1}{2}BC$ সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল।

উদাহরণ ৪। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



সমাধান : মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\overrightarrow{AO} = \underline{a}, \overrightarrow{BO} = \underline{b}, \overrightarrow{OC} = \underline{c}, \overrightarrow{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|, |\underline{b}| = |\underline{d}|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। $\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

অর্থাৎ $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয় পক্ষে $-\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

এখানে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC, $\therefore \underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC.

$\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD, $\therefore \underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক *BD.*

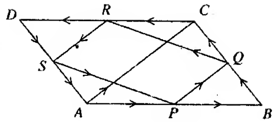
$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে এদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু AC ও BD দুইটি পরস্পরছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = \underline{0}$ বা $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = \underline{0}$ বা $\underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণ ৫। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।



সমাধান : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA, বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$,

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

∴ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

∴ PQRS একটি সামান্তরিক।

অনুশীলনী–১২

১। AB || DC হলে

i $\overrightarrow{AB} = m.\ \overrightarrow{DC}$, যেখানে m একটি স্কেলার রাশি

ii $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

iii $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

ক. i　　খ. ii

গ. i ও ii　　ঘ. i, ii ও iii

২। দুইটি ভেক্টর সমান্ত রাল হলে–

i এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য।

ii এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য।

iii এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান।

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোন্‌টি সঠিক?

ক. i　　খ. ii

গ. i ও ii　　ঘ. i, ii ও iii

৩। AB = CD এবং AB || CD হলে কোনটি সঠিক?

ক. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$　　খ. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ যেখানে $m>1$

গ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < O$　　ঘ. $\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{CD} = O$ যেখানে $m>1$

নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

AB রেখাংশের ওপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, ও $\underline{c}$ ।

৪। C বিন্দুটি AB রেখাংশকে 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $\underline{c}=\dfrac{\underline{a}+2\underline{b}}{5}$ খ. $\underline{c}=\dfrac{2\underline{a}+\underline{b}}{5}$

গ. $\underline{c}=\dfrac{3\underline{a}+2\underline{b}}{5}$ ঘ. $\underline{c}=\dfrac{2\underline{a}+3\underline{b}}{5}$

৫। ভেক্টর মূলবিন্দুটি O হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $\overrightarrow{OA}=\underline{a}-\underline{b}$ খ. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$

গ. $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}$ ঘ. $\overrightarrow{OC}=\underline{c}-\underline{b}$

৬। ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$

৭। দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a}+\underline{b})=-\underline{a}-\underline{b}$

(খ) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$ হলে $\underline{a}=\underline{c}-\underline{b}$

৮। দেখাও যে (ক) $\underline{a}+\underline{a}=2\underline{a}$ (খ) $(m-n)\underline{a}=m\underline{a}-n\underline{a}$

(গ) $m(\underline{a}-\underline{b})=m\underline{a}-m\underline{b}$

৯। (ক) $\underline{a}$, $\underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\underline{a}=m\underline{b}$ হতে পারে কেবল যদি a, b এর সমান্তরাল হয়।

(খ) $\underline{a}$, $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a}+n\underline{b}=0$ হলে দেখাও যে, $m=n=0$

১০। A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b}-\underline{a}=\underline{c}-\underline{d}$ হয়।

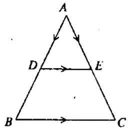
১১। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

১২। প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

১৩। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

১৪ ।ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং এদের বিয়োগফলের অর্ধেক ।

১৫ ।



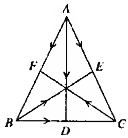
ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর ।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB||DC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ. ABCD ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN||DE||BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC\text{-}DC)$.

১৬ । ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F



ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর ।

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{O}$

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে ।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

ঘন জ্যামিতি

আমাদের বাস্তব জীবনে বিভিন্ন আকারের ঘনবস্তুর প্রয়োজন ও এর ব্যবহার সর্বদাই হয়ে তাকে। এর মধ্যে সুষম ও বিষম আকারের ঘনবস্তু আছে। সুষম আকারের ঘনবস্তু এবং দুইটি সুষম ঘনবস্তুর সমন্বয়ে গঠিত যৌগিক ঘনবস্তুর আয়তন ও পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় পদ্ধতি এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ঘনবস্তুর প্রতীকীয় চিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- প্রিজম, পিরামিড আকৃতির বস্তু, গোলক ও সমবৃত্তভূমিক কোনকের আয়তন এবং পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- ঘন জ্যামিতির ধারণা প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- যৌগিক ঘনবস্তুর আয়তন ও পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।
- ঘন জ্যামিতির ধারণা ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রয়োগ করতে পারবে।

১৩.১ মৌলিক ধারণা

মাধ্যমিক জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও তলের মৌলিক ধারণা আলোচিত হয়েছে। ঘন জ্যামিতিতেও বিন্দু, রেখা ও তল মৌলিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

১। বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটিকে ঐ বস্তুর মাত্রা (dimension) বলা হয়।

২। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। এটি একটি ধারণা। বাস্তবে বোঝার জন্যে আমরা একটি ডট (.) ব্যবহার করি। একে অবস্থানের প্রতিরূপ বলা যেতে পারে। সুতরাং বিন্দুর কোনো মাত্রা নেই। তাই বিন্দু শূন্য মাত্রিক।

৩। রেখার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। তাই রেখা একমাত্রিক।

৪। তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, উচ্চতা নেই। তাই তল দ্বিমাত্রিক।

৫। যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে, একে ঘনবস্তু বলা হয়। সুতরাং ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক।

১৩.২ কতিপয় প্রাথমিক সংজ্ঞা

১। **সমতল** (Plane surface) : কোনো তলের উপরস্থ যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের ওপর অবস্থিত হলে, ঐ তলকে সমতল বলা হয়। পুকুরের পানি স্থির থাকলে ঐ পানির উপরিভাগ একটি সমতল। সিমেন্ট দিয়ে নির্মিত বা মোজাইককৃত ঘরের মেঝেকে আমরা সমতল বলে থাকি। কিন্তু জ্যামিতিকভাবে তা সমতল নয়, কারণ ঘরের মেঝেতে কিছু উঁচু-নিচু থাকেই।

দ্রষ্টব্য : অন্য কিছু উল্লেখ না থাকলে ঘন জ্যামিতিতে রেখা বা দৈর্ঘ্য এবং তলের বিস্তার অসীম (infinite) বা অনির্দিষ্ট মনে করা হয়। সুতরাং তলের সংজ্ঞা থেকে অনুমান করা যায় যে, কোনো সরলরেখার একটি অংশ কোনো তলের ওপর থাকলে অপর কোনো অংশ ঐ তলের বাইরে থাকতে পারে না।

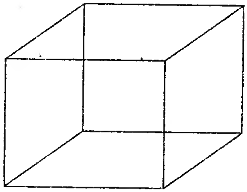
২। **বক্রতল** (Curved surface) : কোনো তলের ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের ওপর অবস্থিত না হলে, ঐ তলকে বক্রতল বলা হয়। গোলকের পৃষ্ঠতল একটি বক্রতল।

৩। **ঘন জ্যামিতি** (Solid geometry) : গণিত শাস্ত্রের যে শাখার সাহায্যে ঘনবস্তু এবং তল, রেখা ও বিন্দুর ধর্ম জানা যায়, একে ঘন জ্যামিতি বলা হয়। কখনো কখনো একে জাগতিক জ্যামিতি (Geometry of space) বা ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিও (Geometry of three dimensions) বলা হয়।

৪। **একতলীয় রেখা** (Coplanar straight lines) : একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত হলে, বা এদের সকলের ম ধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন সম্ভব হলে ঐ সরলরেখাগুলোকে একতলীয় বলা হয়।

৫। **নৈকতলীয় রেখা** (Skew or non coplanar lines) : একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত না হলে বা এদের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব না হলে এগুলোকে নৈকতলীয় সরলরেখা বলা হয়। দুইটি পেন্সিলকে একটির ওপর আর একটি দিয়ে যোগ বা গুণচিহ্ন আকৃতির একটি বস্তু তৈরি করলেই দুইটি নৈকতলীয় সরলরেখা উৎপন্ন হবে।

৬। **সমান্তরাল সরলরেখা** (Parallel lines) : দুইটি একতলীয় সরলরেখা যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি এদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে এদের সমান্ত রাল সরলরেখা বলা হয়।

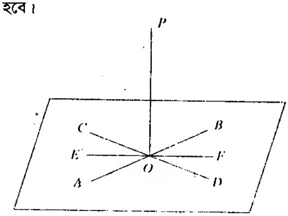


৭। **সমান্তরাল তল** (Parllel planes) : দুইটি সমতল যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি এদের কোনো সাধারণ রেখা না থাকে তবে ঐ তলদ্বয়কে সমান্তরাল তল বলা হয়।

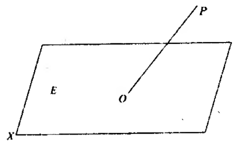
৮। **সমতলের সমান্তরাল রেখা** : একটি সরলরেখা ও একটি সমতলকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও যদি এরা পরস্পর ছেদ না করে, তবে ঐ সরলে রেখাকে উক্ত তলের সমান্তরাল রেখা বলা হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ সাধারণ ত্রিমাত্রিক বস্তুর ছবি দ্বিমাত্রিক কাগজ বা বোর্ডে অঙ্কন কিছুটা জটিল। তাই শ্রেণিকক্ষে পাঠদানকালে প্রত্যেকটি সংজ্ঞার ব্যাখ্যার সঙ্গে এর একটি চিত্র অঙ্কন করে দেখিয়ে দিলে বিষয়টি শিক্ষার্থীদের পক্ষে বোঝা ও মনে রাখা সহজতর হবে।

৯। **তলের লম্ব রেখা** (Normal or perpendicular to a plane) : কোনো সরলরেখা একটি সমতলের উপরস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলের ওপর অঙ্কিত কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলের ওপর অঙ্কিত যে কোনো রেখার ওপর লম্ব হলে, উক্ত সরলরেখাকে ঐ সমতলের ওপর লম্ব বলা হয়।

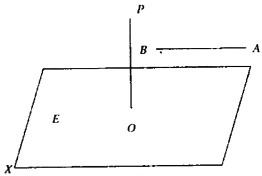


১০। **তির্যক** (Oblique) **রেখা** : কোনো সরলরেখাএকটি সমতলের সাথে সমান্তরাল বা লম্ব না হলে, ঐ সরলরেখাকে সমতলের তির্যক রেখা বলা হয়।



১১। **উলম্ব** (Vertical) **রেখা বা তল** : স্থির অবস্থায় ঝুলন্ত ওলনের সুতার সঙ্গে সমান্তরাল কোনো রেখা বা তলকে খাড়া বা উলম্ব তল বলে।

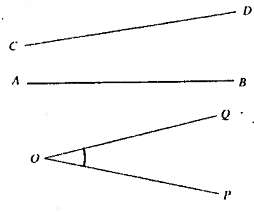
১২। **অনুভূমিক** (Horizontal) **তল ও রেখা** : কোনো সমতল একটি খাড়া সরলরেখার সাথে লম্ব হলে, তাকে শয়ান বা অনুভূমিক তল বলা হয়। আবার কোনো অনুভূমিক তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখাকে অনুভূমিক সরলরেখা বলা হয়।



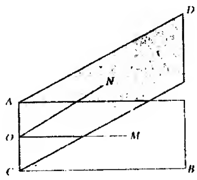
১৩। **সমতল ও নৈকতলীয় চতুর্ভুজ** : কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত হলে, একে সমতল চতুর্ভুজ বলা হয়। আবার কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত না হলে, ঐ চতুর্ভুজকে নৈকতলীয় চতুর্ভুজ বলা হয়। নৈকতলীয় চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু একতলে এবং অপর দুইটি অন্য তলে অবস্থিত। সুতরাং কোনো নৈকতলীয় চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় নৈকতলীয়।

১৪। **নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ** : দুইটি নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ এদের যেকোনো একটি ও এর উপরস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত অপরটির সমান্তরাল রেখার অন্তর্গত কোণের সমান। আবার দুইটি নৈকতলীয় রেখার প্রত্যেকের সমান্তরাল দুইটি রেখা কোনো বিন্দুতে অঙ্কন করলে ঐ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাণও নৈকতলীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।

মনে করি, AB ও CD দুইটি নৈকতলীয় রেখা। যেকোনো O বিন্দুতে AB ও CD এর সমান্তরাল যথাক্রমে OP এবং OQ রেখাদ্বয় অঙ্কন করলে $\angle POQ$ ই AB ও CD এর অন্তর্গত কোণ নির্দেশ করবে।

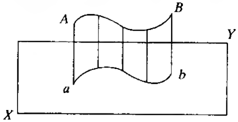


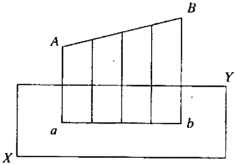
১৫। **দ্বিতল কোণ** (Dihedral angle) : দুইটি সমতল সরলরেখায় ছেদ করলে এদের ছেদ রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলদ্বয়ের প্রত্যেকের ওপর ঐ ছেদ রেখার সাথে লম্ব এরূপ একটি করে রেখা অঙ্কন করলে উৎপন্ন কোণই ঐ সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ।



AB ও CD সমতলদ্বয় AC রেখায় পরস্পর ছেদ করেছে। AC রেখাস্থ O বিন্দুতে AB সমতলে OM এবং CD সমতলে ON এরূপ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করা হলো যেন এরা উভয়ই AC এর সঙ্গে O বিন্দুতে লম্ব হয়। তাহলে $\angle MON$ ই AB ও CD সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সূচিত করে। দুইটি পরস্পচ্ছেদী সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের পরিমাণ এক সমকোণ হলে, ঐ সমতলদ্বয় পরস্পর লম্ব।

১৬। অভিক্ষেপ : কোনো বিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট সরলখোর ওপর বা কোনো সমতলের ওপর অঙ্কিত লম্বরেখার পাদবিন্দুকে ঐ রেখা বা সমতলের ওপর উক্ত বিন্দুর পাতন বা অভিক্ষেপ (Projection) বলা হয়। কোনো সরলরেখা বা বক্ররেখার সকল বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট সমতলের ওপর অঙ্কিত লম্বগুলোর পাদবিন্দুসমূহের সেটকে ঐ সমতলের ওপর উক্ত সরলরেখা বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ বলা হয়। এই অভিক্ষেপকে লম্ব অভিক্ষেপও (Orthogonal Projection) বলা হয়।





চিত্রে XY সমতলের ওপর একটি বক্ররেখা ও একটি সরলরেখার অভিক্ষেপ দেখানো হয়েছে।

১৩.৩ দুইটি সরলরেখার মধ্যে সম্পর্ক

(ক) দুইটি সরলরেখা একতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে এরা অবশ্যই সমান্তরাল হবে বা কোনো এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করবে।

(খ) দুইটি সরলরেখা নৈকতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে এরা সমান্তরালও হবে না কিংবা কোনো বিন্দুতে ছেদও করবে না।

১৩.৪ স্বতঃসিদ্ধ

(ক) কোনো সমতলের উপরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও তা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত থাকবে। সুতরাং একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যে দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে, ঐ সরলরেখা বরাবর এদের মধ্যে অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

(খ) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা একটি সরলরেখার মধ্য দিয়ে অসংখ্য সমতল অঙ্কন করা যায়।

১৩.৫ সরলরেখা ও সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

(ক) একটি সরলরেখা একটি সমতলের সঙ্গে সমান্তরাল হলে এদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থা কবে না।

(খ) একটি সরলরেখা কোনো সমতলকে ছেদ করলে এদের মধ্যে মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে।

(গ) যদি কোনো সরলরেখা ও সমতলের দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তাহলে সম্পূর্ণ সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত হবে।

১৩.৬ দুইটি সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

(ক) দুইটি সমতল পরস্পর সমান্তরাল হলে এদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

(খ) দুইটি সমতল পরস্পরছেদী হলে এরা একটি সরলরেখায় ছেদ করবে এবং এদের অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

১৩.৭ ঘনবস্তু

আমরা জানি, একখানা বই বা একখানা ইট বা একটি বাক্স বা একটি গোলাকার বল সবই ঘনবস্তু এবং এরা প্রত্যেকেই কিছু পরিমাণ স্থান (Space) দখল করে থাকে। আবার একখণ্ড পাথর বা কাঠ, ইটের একটি খণ্ড, কয়লার টুকরা, এঁটেল মাটির শুকনা খণ্ড ইত্যাদিও ঘনবস্তুর উদাহরণ। তবে এগুলো বিষম ঘনবস্তু।

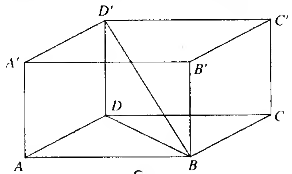
সমতল অথবা বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত শূন্যের কিছুটা স্থান দখল করে থাকে এরূপ বস্তুকে ঘনবস্তু (Solid) বলা হয়। সমতলস্থ কোনো স্থানকে বেষ্টন করতে হলে যেমন, কমপক্ষে তিনটি সরলরেখা দরকার তেমনি জাগতিক কোনো স্থানকে বেষ্টন করতে হলে অন্তত চারটি সমতল দরকার। এই তলগুলো ঘনবস্তুর তল বা পৃষ্ঠতল (Surface) এবং এদের দুটি সমতল যেরেখায় ছেদ করে, একে ঐ ঘনবস্তুর ধার (Edge) বলা হয়।

একটি বাক্সের বা একখানা ইটের ছয়টি পৃষ্ঠতল আছে এবং বারটি ধার আছে। একটি ক্রিকেট বল মাত্র একটি বক্রতল দ্বারা আবদ্ধ।

কাজ: ১। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে সুষম ঘনবস্তু ও বিষম ঘনবস্তুর নাম লেখ।
২। তোমার উল্লেখিত ঘনবস্তুগুলোর কয়েকটি ব্যবহার লিখ।

১৩.৮ সুষম ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল

১। আয়তিক ঘন বা আয়তাকার ঘনবস্ত (Rectangular Parallelopiped)



চিত্র

তিনজোড়া সমান্তরাল সমতল দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে সামান্তরিক ঘনবস্তু বলা হয়। এই ছয়টি সমতলের প্রত্যেকটি একটি সামান্তরিক এবং বিপরীত পৃষ্ঠগুলো সর্বতোভাবে সমান। সামান্তরিক ঘনবস্তুর তিনটি দলে বিভক্ত বারটি ধার আছে।

যে সামান্তরিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলগুলো আয়তক্ষেত্র, একে আয়তাকার ঘনবস্তু বলা হয়। যে আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলগুলো বর্গক্ষেত্র, একে ঘনক (Cube) বলা হয়। উপরোক্ত চিত্রে আয়তাকার ঘনবস্তর এবং ঘনকের পৃষ্ঠগুলো ABCD, A'B'C'D', BCC'B', ADD'A', ABB'A', DCC'D' এবং ধারগুলো AB, A'B', CD, C'D', BC, B'C', AD, A'D', AA', BB', CC', DD' এবং একটি কর্ণ BD'.

মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $AB = a$ একক, $AD = b$ একক এবং $AA' = c$ একক।

(ক) আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Area of the whole surface)

= ছয়টি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

= 2(ABCD তলের ক্ষেত্রফল + ABB′A′ তলের ক্ষেত্রফল + ADD′A′ তলের ক্ষেত্রফল)
$= 2(ab + ac + bc)$ বর্গএকক
$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গএকক

(খ) আয়তন (Volume) = AB × AD × AA′ ঘনএকক = abc ঘনএকক

(গ) কর্ণ $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + DD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

২। ঘনকের ক্ষেত্রে, a = b = c. অতএব

(ক) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2(a^2+a^2+a^2) = 6a^2$ বর্গএকক

(খ) আয়তন = a. a. a = a^3 ঘনএকক

(গ) কর্ণ= $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}\,a$ একক।

উদাহরণ ১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 4: 3: 2 এবং এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 468 বর্গমিটার হলে, এর কর্ণ ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $4x, 3x, 2x$ মিটার।

তাহলে, $2(4x.3x + 3x.2x + 2x.4x) = 468$

বা, $52x^2 = 468$ বা, $x^2 = 9$, $\therefore x = 3$

$\therefore$ ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 12 মি., প্রস্থ 9 মি. এবং উচ্চতা 6 মি.

ইহার কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{12^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{144+81+36} = \sqrt{261}$ মিটার =16.16 মিটার (প্রায়)

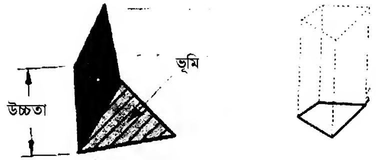
এবং আয়তন = $12\times9\times6$ ঘনমিটার = 648 ঘনমিটার।

কাজ : ১। পিজবোর্ডের একটি ছোট বাক্স (কার্টুন অথবা ঔষধের বোতলের প্যাকেট) এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও উচ্চতা মেপে এর আয়তন, ছয়টি তলের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩। প্রিজম (Prism)

যে ঘনবস্তুর দুই প্রান্ত সর্বসম ও সমান্তরাল বহুভুজ দ্বারা আবদ্ধ এবং অন্য তলগুলো সামান্তরিক একে প্রিজম বলে। প্রিজমের দুই প্রান্তকে ইহার ভূমি এবং অন্য তলগুলোকে পার্শ্বতল বলে। সবগুলো পার্শ্বতল আয়তাকার হলে প্রিজমটিকে খাড়া বা সম প্রিজম এবং অন্যক্ষেত্রে প্রিজমটিকে তির্যক প্রিজম বলা হয়। বাস্তব ক্ষেত্রে খাড়া প্রিজমই অধিক ব্যবহৃত হয়। ভূমি তলের নামের ওপর নির্ভর করে প্রিজমের নামকরণ করা হয়। যেমন, ত্রিভুজাকার প্রিজম, চতুর্ভুজাকার প্রিজম, পঞ্চভুজাকার প্রিজম ইত্যাদি।

ভূমি সুষম বহুভুজ হলে প্রিজমকে সুষম প্রিজম (Regular prism) বলে। ভূমি সুষম না হলে ইহাকে বিষম প্রিজম (Irregular prism) বলা হয়। সংজ্ঞানুসারে আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক উভয়কেই প্রিজম বলা হয়। কাঁচের তৈরি খাড়া ত্রিভুজাকার প্রিজম আলোকরশ্মির বিচ্ছুরণের জন্য ব্যবহৃত হয়।



দুই ধরনের প্রিজম

ক) প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= 2 (ভূমির ক্ষেত্রফল) + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

= 2 (ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

খ) আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

উদাহরণ ২। একটি ত্রিভুজাকার সম প্রিজমের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4 ও 5 সে. মি. এবং উচ্চতা 8 সে. মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রিজমের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4 ও 5 সে. মি.।

যেহেতু $3^2 + 4^2 = 5^2$, ইহার ভূমি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3$ বর্গ সে. মি $= 6$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2 \times 6 + (3 + 4 + 5) \times 8 = 12 + 96$ বর্গ সে. মি = 108 বর্গ সে. মি.

এবং ইহার আয়তন = 6×8 ঘন সে. মি.= 48 ঘন সে. মি.

অতএব প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 108 বর্গ সে. মি. এবং আয়তন 48 ঘন সে. মি.।

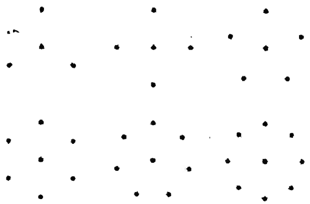
৪. পিরামিড (Pyramid)

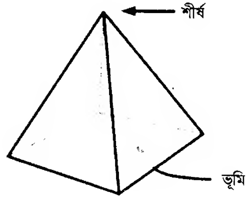
বহুভুজের ওপর অবস্থিত যে ঘনবস্তুর একটি শীর্ষবিন্দু থাকে এবং যার পার্শ্বতলগুলোর প্রত্যেকটি ত্রিভুজাকার একে পিরামিড বলে।

পিরামিডের ভূমি যেকোনো আকারের বহুভুজ এবং এর পার্শ্বতলগুলোও যেকোনো ধরনের ত্রিভুজ হতে পারে। তবে ভূমি সুষম বহুভুজ এবং পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে একে সুষম পিরামিড বলা হয়। সুষম পিরামিডগুলো খুবই দৃষ্টিনন্দন। শীর্ষবিন্দু ও ভূমির যেকোনো কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখাকে পিরামিডের ধার বলে। শীর্ষ হতে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্যকে পিরামিডের উচ্চতা বলা হয়।

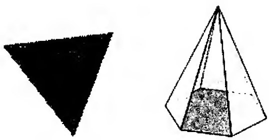
তবে আমরা পিরামিড বলতে সচরাচর বর্গাকার ভূমির ওপর অবস্থিত চারটি সর্বসম ত্রিভুজ দ্বারা বেষ্টিত ঘনবস্তুকেই বুঝি। এই ধরনের পিরামিডের বহুল ব্যবহার আছে।

চারটি সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা বেষ্টিত ঘনবস্তুকে সুষম চতুস্তলক (Regular tetrahedron) বলে যা একটি পিরামিড। এই পিরামিডের 3 + 3 = 6 টি ধার ও 4 টি কৌণিক বিন্দু আছে। ইহার শীর্ষ হতে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্ব ভূমির ভরকেন্দ্রে পতিত হয়।





বিভিন্ন ধরনের পিরামিডের ভূমির নকশা



পিরামিড

ক) পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= ভূমির ক্ষেত্রফল + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

কিন্তু পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে,

পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি × হেলানো উচ্চতা)

পিরামিডের উচ্চতা h, ভূমিক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং হেলানো উচ্চতা l হলে, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

খ) আয়তন = $\frac{1}{3}$ × ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

উদাহরণ ৩। 10 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির ওপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 12 সে. মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধানঃ পিরামিডের ভূমির কেন্দ্রবিন্দু হতে যেকোনো বাহুর লম্ব দূরত্ব $r = \frac{10}{2}$ সে. মি. = 5 সে. মি. ,

পিরামিডের উচ্চতা 12 সে. মি.। অতএব

ইহার যেকোনো পার্শ্বতলের হেলানো উচ্চতা $=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ সে. মি.

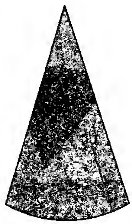
পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=10\times10+\frac{1}{2}(4\times10)\times13$ বর্গ সে. মি. $=(100+260)$ বর্গ সে. মি. $=360$ বর্গ সে. মি.

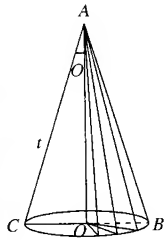
এবং ইহার আয়তন $=\frac{1}{3}\times(10\times10)\times12$ ঘন সে. মি. $=10\times10\times4$ ঘন সে. মি. $=400$ ঘন সে. মি.

অতএব পিরামিডটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 360 বর্গ সে. মি. এবং আয়তন 400 ঘন সে. মি.।

কাজ : ১। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে সুষম ও একটি করে বিষম (ক) প্রিজম ও (খ) পিরামিড আঁক।
২। যেক্ষেত্রে সম্ভব, তোমার অঙ্কিত ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

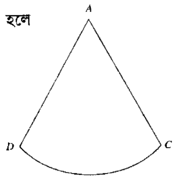
৪। সমবৃত্তভূমিক কোনক (Right circular cone)





কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণসংলগ্ন একটি বাহুকে অক্ষ (axis) ধরে এর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, একে সমবৃত্তভূমিক কোনক বলা হয়।

চিত্রে, OAC সমকোণী ত্রিভুজকে OA এর চতুর্দিকে ঘোরানোর ফলে ABC সমবৃত্তভূমিক কোনক উৎপন্ন হয়েছে। এক্ষেত্রে ত্রিভুজের শীর্ষকোণ θ হলে, θ কে কোনকের অর্ধশীর্ষকোণ (Semi- vertical angle) বলা হয়।



কোনকের উচ্চতা $OA=h$, ভূমির ব্যাসার্ধ $OC=r$ এবং হেলানো উচ্চতা $AC=l$ হলে

(ক) বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমির পরিধি $\times$ হেলানো উচ্চতা

$=\frac{1}{2}\times2\pi r\times l=\pi rl$ বর্গএকক

(খ) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমিতলের ক্ষেত্রফল

$=\pi rl+\pi r^2=\pi r(r+l)$ বর্গএকক

(গ) আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক।

[আয়তনের এই সূত্রটি নির্ণয় পদ্ধতি উচ্চতর শ্রেণিতে শেখানো হবে।]

উদাহরণ ৪। একটি সমবৃত্তভূমিক কোনকের উচ্চতা 12 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 10 সে. মি. হলে এর হেলানো উচ্চতা, বক্রতলের ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : ভূমির ব্যাসার্ধ $r = \frac{10}{2}$ সে. মি.= 5 সে. মি.

হেলানো উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ সে. মি.

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l = \pi \times 5 \times 13 = 204.2035$ ব. সে. মি.

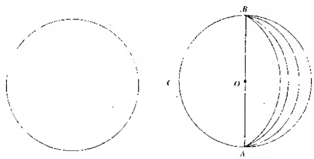
সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(l + r) = \pi \times 5(13 + 5) = 282.7433$ ব. সে. মি. (প্রায়)

আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 = 314.1593$ ঘ. সে. মি.।

> **কাজঃ** জন্মদিনে বা অন্যান্য আনন্দ উৎসবে ব্যবহৃত কোনক আকৃতির একটি ক্যাপ সংগ্রহ করে এর বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

৫। গোলক (Sphere)

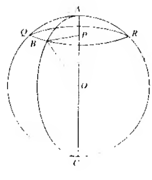
কোনো অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রের ব্যাসকে অক্ষ ধরে ঐ ব্যাসের চতুর্দিকে অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় একে গোলক বলে। অর্ধবৃত্তটির কেন্দ্রই গোলকের কেন্দ্র। এই ঘূর্ণনের ফলে অর্ধবৃত্ত যে তল উৎপন্ন করে তাই হলো গোলকের তল। গোলকের কেন্দ্র বলতে মূল বৃত্তের কেন্দ্রকেই বোঝায়।



$CQAR$ গোলকের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ $OA = OB = OC = r$ এবং কেন্দ্র থেকে h দূরত্বে P বিন্দুর মধ্য দিয়ে OA রেখার সাথে লম্ব হয় এরূপ একটি সমতল গোলকটিকে ছেদ করে QBR বৃত্তটি উৎপন্ন করেছে। এই বৃত্তের কেন্দ্র P এবং ব্যাসার্ধ PB। তাহলে PB এবং OP পরস্পর সমান।

$\therefore OB^2 = OP^2 + PB^2$

$\therefore PB^2 = OB^2 - OP^2 = r^2 - h^2$



(ক) গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গএকক।

(খ) আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘনএকক।

(গ) h উচ্চতায় তলচ্ছেদে উৎপন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{r^2 - h^2}$ একক।

কাজ: একটি খেলনা বল বা ফুটবল নিয়ে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। অতঃপর এর আয়তনও বের কর।

উদাহরণ ৫। 4 সে. মি. ব্যাসের একটি নিরেট লৌহ গোলককে পি টিয়ে $\frac{3}{2}$ সে. মি. পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হলো। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ কত?

সমাধান : লৌহ গোলকের ব্যাসার্ধ $= \frac{4}{2}$ সে. মি. $= 2$ সে. মি.। $\therefore$ এর আয়তন $= \frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32}{3}\pi$ ঘন সে. মি.।

মনে করি, পাতের ব্যাসার্ধ $= r$ সে. মি.। পাতটি $\frac{2}{3}$ সে. মি. পুরু।

$\therefore$ পাতের আয়তন $= \pi r^2 \times \frac{2}{3}$ ঘ. সে. মি. $= \frac{2}{3}\pi r^2$ ঘ. সে. মি.।

শর্তানুসারে, $\frac{2}{3}\pi r^2 = \frac{32}{3}\pi$ বা, $r^2 = 16$ বা, $r = 4$

$\therefore$ পাতের ব্যাসার্ধ $= 4$ সে. মি.

উদাহরণ ৬। সমান উচ্চতা বিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক কোনক, একটি অর্ধগোলক ও একটি সিলিন্ডার সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত। দেখাও যে, এদের আয়তনের অনুপাত $1:2:3$

সমাধান : মনে করি, সাধারণ উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে h এবং r একক। যেহেতু অর্ধগোলকের উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ সমান। $\therefore h = r$

তাহলে কোনকের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3$ ঘনএকক

অর্ধগোলকের আয়তন $= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$ ঘনএকক এবং সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi r^2 h = \pi r^3$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1 = 1 : 2 : 3$

উদাহরণ ৭। একটি আয়তাকার লৌহ ফলকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 10, 8 ও $5\frac{1}{2}$ সে. মি.। এই ফলকটিকে গলিয়ে $\frac{1}{2}$ সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কতগুলো গোলাকার গুলি প্রস্তুত করা যাবে?

সমাধান : লৌহ ফলকের আয়তন $= 10 \times 8 \times 5\frac{1}{2}$ ঘ. সে. মি. $= 440$ ঘ. সে. মি.

মনে করি, গুলির সংখ্যা $= n$

$\therefore$ n সংখ্যক গুলির আয়তন $= n \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{n\pi}{6}$ ঘ. সে. মি.

প্রশ্নানুসারে, $\frac{n\pi}{6} = 440$; $\therefore$ $n = \frac{440 \times 6}{\pi} = 840{\cdot}3$

$\therefore$ নির্ণেয় গুলির সংখ্যা 840 টি।

উদাহরণ ৮। একটি সমবৃত্তভূমিক কোনকের আয়তন V, বক্রতলের ক্ষেত্রফল S, ভূমির ব্যাসার্ধ r, উচ্চতা h এবং অর্ধ শীর্ষকোণ α হলে দেখাও যে,

$(i)\, S = \dfrac{\pi h^2 \tan\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\pi r^2}{\sin\alpha}$ বর্গএকক

$(ii)\, V = \dfrac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha = \dfrac{\pi r^3}{3\tan\alpha}$ ঘনএকক

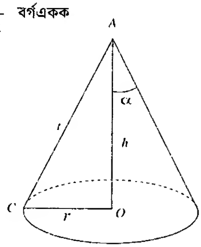
সমাধান : পাশের চিত্রে, কোনকের উচ্চতা $OA = h$, হেলানো উচ্চতা $AC = l$, ভূমির ব্যাসার্ধ $OC = r$ এবং অর্ধ শীর্ষকোণ $\angle OAC = \alpha$.

হেলানো উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.

চিত্র হতে দেখা যায় যে, $\tan\alpha = \dfrac{r}{h}$; $\therefore\ r = h\tan\alpha$ বা, $h = \dfrac{r}{\tan\alpha} = r\cot\alpha$

এখন $(i)\, S = \pi r l = \pi r\sqrt{h^2 + h^2\tan^2\alpha} = \pi r h\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \pi r h\sqrt{\sec^2\alpha}$

$$= \pi r h \sec\alpha = \frac{\pi r}{\cos\alpha}.r\cot\alpha = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha} \text{ বর্গএকক}$$



$(ii)\, V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h = \dfrac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha$

$= \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{r}{\tan\alpha}\right)^3\tan^2\alpha = \dfrac{\pi r^3}{3\tan\alpha}$ ঘনএকক।

৫। যৌগিক ঘনবস্তু (Compound solid)

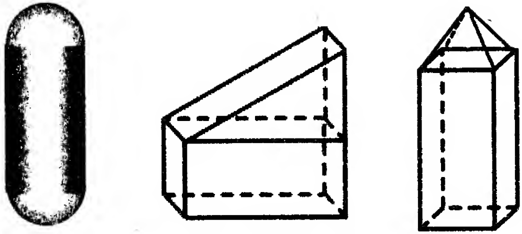
দুইটি ঘনবস্তুর সমন্বয়ে গঠিত ঘনবস্তুকে যৌগিক ঘনবস্তু বলে।
যৌগিক ঘনবস্তুর কয়েকটি উদাহরণ :

(১) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর উপরের তল যদি একটি খাড়া প্রিজমের কোনো একটি তলের সমান হয় তবে ঘনবস্তুর ওপর মিলিয়ে প্রিজমটি বসালে একটি যৌগিক ঘনবস্তু হয়।

(২) একটি প্রিজমের ভূমি ও একটি চতুস্তলকের ভূমি সর্বসম হলে এবং চতুস্তলকটিকে প্রিজমের ওপর বসালে একটি যৌগিক ঘনবস্তু হয়।

(৩) একটি গোলকের ব্যাসার্ধ ও একটি সমবৃত্তভূমিক কোনকের ভূমির ব্যাসার্ধ সমান হলে এবং কোনকটিকে গোলকের ওপর বসালে একটি নতুন ঘনবস্তু সৃষ্টি হয়।

(৪) দুইটি অর্ধগোলক ও একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের সমন্বয়ে গঠিত যৌগিক ঘনবস্তুকে ক্যাপসুল বলা যেতে পারে।



বিভিন্ন আকারের যৌগিক ঘনবস্তু

এভাবে দুই বা দুইয়ের অধিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে বিভিন্ন প্রকারের যৌগিক ঘনবস্তু তৈরি করা যায়। অনেক দৃষ্টিনন্দন স্থাপনাও যৌগিক ঘনবস্তু। ব্যায়াম করার অনেক উপকরণও একাধিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে তৈরি করা হয়।

কাজ: তোমরা প্রত্যেকে একটি করে যৌগিক ঘনবস্তু অঙ্কন কর ও ইহার বর্ণনা দাও। সম্ভব হলে ইহার তলসমূহের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়ের সূত্র লেখ।

উদাহরণ ৯। একটি ক্যাপসুলের দৈর্ঘ্য 15 সে. মি.। ইহার সিলিন্ডার আকৃতির অংশের ব্যাসার্ধ 3 সে. মি. হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: ক্যাপসুলের সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য 15 সে. মি.। যেহেতু ক্যাপসুলের দুই প্রান্ত অর্ধগোলকাকৃতির, সেহেতু ইহার সিলিন্ডার আকৃতির অংশের দৈর্ঘ্য $h = 15 - (3 + 3) = 9$ সে. মি.।

সুতরাং ক্যাপসুলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= দুই প্রান্তের অর্ধগোলাকৃতি অংশের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল + সিলিন্ডার আকৃতির অংশের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= 2\times\frac{1}{2}\times 4\pi r^2 + 2\pi rl = 4\pi(3)^2 + 2\pi\times 3\times 9$ [$\because r = 3$ সে. মি.]

$= 90\pi = 282.74$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)

এবং ক্যাপসুলটির আয়তন $= 2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi(3)^3 + \pi(3)^2\times 9 = 117\pi = 367.57$ ঘন সে. মি.।

অনুশীলনী–১৩

১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 8 সে.মি., প্রস্থ 4 সে.মি এবং উচ্চতা 3 সে.মি. হলে এর কর্ণ কত?

ক. $\sqrt{89}$ সে.মি. খ. 25 সে.মি

গ. $25\sqrt{2}$ সে.মি ঘ. 50 সে.মি

২। কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং 3 সে.মি.। ত্রিভুজটিকে বৃহত্তর বাহুর চর্তুদিকে ঘোরালে–

i উৎপন্ন ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক কোনক হবে

ii ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার হবে

iii উৎপন্ন ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল হবে ৭π বর্গ সে.মি।

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোন্‌টি সঠিক?

ক. i　　　　খ. ii

গ. i ও iii　　　　ঘ. ii ও iii

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

2 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি সিলিন্ডার আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়।

৩। সিলিন্ডারের আয়তন কত?

ক. 2π ঘন সে.মি.　　　　খ. 4π ঘন সে.মি.

গ. 6π ঘন সে.মি.　　　　ঘ. 8π ঘন সে.মি.

৪। সিলিন্ডারটির অনধিকৃত অংশের আয়তন কত?

ক. $\frac{\pi}{3}$ ঘন সে.মি.　　　　খ. $\frac{2\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

গ. $\frac{4\pi}{3}$ ঘন সে.মি.　　　　ঘ. $\frac{3\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

নিম্নের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

6 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি ধাতব কঠিন গোলককে গলিয়ে 3 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি করা হলো।

৫। উৎপন্ন সিলিন্ডারটির উচ্চতা কত?

ক. 4 সে. মি.　　　　খ. 6 সে. মি.

গ. 8 সে. মি.　　　　ঘ. 12 সে. মি.

৬। সিলিন্ডারটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক. 24π　　　　খ. 42π

গ. 72π　　　　ঘ. 96π

৭। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মি., 12 মি. ও 4.5 মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন নির্ণয় কর।

৮। ভূমির ওপর অবস্থিত 2.5 মি. দৈর্ঘ্য ও 1.0 মি. প্রস্থবিশিষ্ট (অভ্যন্তরীণ পরিমাপ) একটি আয়তাকার জলাধারের উচ্চতা 0.4 মিটার হলে, এর আয়তন এবং অভ্যন্তরীণ তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৯। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর মাত্রাগুলো 5 সে. মি., 4 সে. মি. ও 3 সে. মি. হলে, এর কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০। 70 জন ছাত্রের জন্য এরূপ একটি হোস্টেল নির্মাণ করতে হবে যাতে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য 4.25 বর্গমিটার মেঝে ও 13.6 ঘনমিটার শূন্যস্থান থাকে। ঘরটি 3.4 মিটার লম্বা হলে, এর প্রস্থ ও উচ্চতা কত হবে?

১১। একটি সমবৃত্তভূমিক কোনকের উচ্চতা 8 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 সে. মি. হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১২। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 24 সে. মি. এবং আয়তন 1232 ঘন সে. মি.। এর হেলানো উচ্চতা কত?

১৩। কোনো সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি. এবং 3.5 সে. মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, এর আয়তন নির্ণয় কর।

১৪। 6 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১৫। 6, 8, r সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি কঠিন কাঁচের বল গলিয়ে 9 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি কঠিন গোলকে পরিণত করা হলো। r এর মান নির্ণয় কর।

১৬। একটি ফাঁপা লোহার গোলকের বাইরের ব্যাস 13 সে. মি. এবং লোহার বেধ 2 সে. মি.। ঐ গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। এর ব্যাস কত হবে?

১৭। 4 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 5 সে. মি বহিব্যাসার্ধবিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হলো। দ্বিতীয় গোলকটি কত পুরু?

১৮। একটি লোহার নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 6 সে. মি। এর লোহা থেকে 8 সে. মি. দৈর্ঘ্য ও 6 সে. মি. ব্যাসের কয়টি নিরেট সিলিন্ডার প্রস্তুত করা যাবে?

১৯। $\frac{22}{\pi}$ সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর।

২০। 13 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলকের কেন্দ্র থেকে 12 সে. মি. দূরবর্তী কোনো বিন্দুর মধ্য দিয়ে ব্যাসের ওপর লম্ব সমতল গোলকটিকে ছেদ করে। উৎপন্ন তলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১। একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্সের বাইরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 1.6 মি. ও 1.2 মি., উচ্চতা 0.8 মি. এবং এর কাঠ 3 সে. মি. পুরু। বাক্সটির ভেতরের তলের ক্ষেত্রফল কত? প্রতি বর্গমিটার 14.44 টাকা হিসাবে বাক্সের ভেতর রং করতে কত খরচ হবে?

২২। 120 মি. দৈর্ঘ্য ও 90 মি. প্রস্থবিশিষ্ট (বহির্মাপ) আয়তাকার বাগানের চতুর্দিকে 2 মি. উচ্চ ও 25 সে. মি. পুরু প্রাচীর নির্মাণ করতে 25 সে. মি. দৈর্ঘ্য 12.5 সে. মি. প্রস্থ এবং 8 সে. মি. বেধবিশিষ্ট কতগুলো ইট লাগবে?

২৩। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত $4:3$ এবং এর আয়তন 2304 ঘন সে. মি.। প্রতি বর্গসেন্টিমিটারে 10 টাকা হিসেবে ঐ বস্তুর তলায় সিসার প্রলেপ দিতে 1920 টাকা খরচ হলে, ঐ বস্তুর মাত্রাগুলো নির্ণয় কর।

২৪। সমবৃত্তভূমিক কোনক আকারের একটি তাঁবুর উচ্চতা 7.5 মিটার। এই তাঁবু দ্বারা 2000 বর্গমিটার জমি ঘিরতে চাইলে কী পরিমাণ ক্যানভাস লাগবে?

২৫। একটি পঞ্চভুজাকার সমপ্রিজমের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে. মি. ও 8 সে. মি. এবং অপর তিনটি বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 12.5 সে. মি.। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৬। 4 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা 5 সে. মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন বের কর।

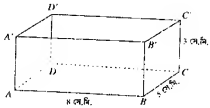
২৭। 6 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের ওপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 10 সে. মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৮। একটি সুষম চতুস্তলকের ধারের দৈর্ঘ্য 8 সে. মি. হলে, ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৯। একটি স্থাপনার নিচের অংশ 3 মি. দৈর্ঘ্য আয়তাকার ঘনবস্তু ও উপরের অংশ সুষম পিরামিড। পিরামিডের ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মি. এবং উচ্চতা 3 মি. হলে স্থাপনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

৩০। 25 মি. দৈর্ঘ্য ও 18 মি. প্রস্থবিশিষ্ট ভূমির ওপর অবস্থিত দোচালা গুদামঘরের দেয়ালের উচ্চতা 5 মি.। প্রতিটি চালার প্রস্থ 14 মি. হলে গুদামঘরটির আয়তন নির্ণয় কর।

৩১।



সৃজনশীল

ক. চিত্রের ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. ঘনবস্তুটির কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট ধাতব ঘনককে গলিয়ে 18 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট কতগুলো নিরেট গোলক উৎপন্ন করা যাবে তা নিকটতম পূর্ণসংখ্যায় নির্ণয় কর।

গ. ঘনবস্তুটির ABCD তলের সমান একটি আয়তক্ষেত্রকে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

৩২। একটি সমবৃত্তভূমিক কোনাকৃতির তাঁবুর উচ্চতা 8 মিটার এবং এর ভূমির ব্যাস 50 মিটার

ক. তাঁবুটির হেলানো উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ. তাঁবুটি স্থাপন করতে কত বর্গমিটার জমির প্রয়োজন হবে? তাঁবুটির ভেতরের শূন্যস্থানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ. তাঁবুটির প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাসের মূল্য 125 টাকা হলে ক্যানভাস বাবদ কত খরচ হবে?

চতুর্দশ অধ্যায়

সম্ভাবনা

আমরা প্রতিনিয়ত 'সম্ভাবনা' শব্দটি ব্যবহার করে থাকি। যেমন এবার এস.এস.সি. পরীক্ষায় যাদবের পাস করার সম্ভাবনা খুব কম, এশিয়া কাপ ক্রিকেটে বাংলাদেশের জয়ের সম্ভাবনা বেশি, আগামীকাল তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাওয়ার সম্ভাবনা বেশি, আজ বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কম ইত্যাদি। অর্থাৎ কোনো ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তা থাকলেই কেবল আমরা সম্ভাবনার কথা বলি। আর অনিশ্চয়তার মাত্রার ওপরই ঘটনাটা ঘটার সম্ভাবনা কম বা বেশি হবে তা নির্ভর করে। কিন্তু কোনো সাংখ্যিক মান দিতে পারে না। এই অধ্যায়ে আমরা কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনার সাংখ্যিক মান নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র এবং নির্ণয় প্রণালী সম্পর্কে জানব এবং নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা ও সম্ভাব্য ঘটনা বর্ণনা করতে পারব।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- সম্ভাবনার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দৈনন্দিন বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা ও সম্ভাব্য ঘটনা বর্ণনা করতে পারবে।
- একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাব্য ফলাফল বর্ণনা করতে পারবে।
- একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারবে।
- সম্ভাবনার সহজ ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

১৪·১ সম্ভাবনার সাথে জড়িত কিছু শব্দের ধারণা

দৈব পরীক্ষা (Random Experiment)

যখন কোনো পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল আগে থেকে জানা থাকে কিন্তু পরীক্ষাটিতে কোনো একটা নির্দিষ্ট চেষ্টায় কী ফলাফল আসবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না, একে দৈব পরীক্ষা বলে। যেমন একটা মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার সম্ভাব্য ফলাফল (H, T) হবে, তা আমরা আগে থেকেই জানি কিন্তু মুদ্রাটি নিক্ষেপের পূর্বে কোন ফলাফলটি ঘটবে তা আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারি না। সুতরাং মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষা একটা দৈব পরীক্ষা।

ঘটনা (Event) : কোনো পরীক্ষার ফলাফল বা ফলাফলের সমাবেশকে ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ একটা ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় '3' পাওয়া একটা ঘটনা। আবার জোড় সংখ্যা পাওয়াও একটি ঘটনা।

সমসম্ভাব্য ঘটনাবলি (Equally Likely Events)

কোনো পরীক্ষার ঘটনাগুলো ঘটার সম্ভাবনা সমান হয় অর্থাৎ যদি একটি অপরটির চেয়ে বেশি বা কম সম্ভাব্য না হয়, তবে ঘটনাগুলোকে সমসম্ভাব্য বলে। যেমন একটা নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপে হেড বা টেল আসার সম্ভাবনা সমান সমান। সুতরাং হেড আসা ও টেল আসা ঘটনা দুইটি সমসম্ভাব্য ঘটনা।

পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাবলি (Mutually Exclusive Events)

কোনো পরীক্ষায় যদি একটা ঘটনা ঘটলে অন্যটা অথবা অন্য ঘটনাগুলো না ঘটতে পারে তবে উক্ত ঘটনাগুলোকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলে। যেমন, একটা নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপ করলে হেড আসা বা টেল আসা দুইটি বিচ্ছিন্ন

ঘটনা। কেননা হেড আসলে টেল আসতে পারে না। আবার টেল আসলে হেড আসতে পারে না। অর্থাৎ হেড ও টেল একসাথে আসতে পারে না।

- **অনুকূল ফলাফল (Favourable Outcomes)**

কোনো পরীক্ষায় একটা ঘটনার স্বপক্ষের ফলাফলকে উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল বলে। যেমন, একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা হওয়ার অনুকূল ফলাফল 3টি।

নমুনাক্ষেত্র (Sample Space) ও নমুনা বিন্দু (Sample Point)

কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে নমুনাক্ষেত্র বলে। একটা মুদ্রা নিক্ষেপ করলে দুইটি সম্ভাব্য ফলাফল পাওয়া যায়। যথা হেড (H) ও টেল (T), এখন S দ্বারা এ পরীক্ষণের ফলাফলের সেটকে সূচিত করলে আমরা লিখতে পারি $S = \{H, T\}$। সুতরাং উক্ত পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র $S = \{H, T\}$. মনে করা যাক দুইটি মুদ্রা একসাথে নিক্ষেপ করা হলো। তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি উপাদানকে ফলাফলের নমুনা বিন্দু বলে। একটা মুদ্রা একবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্র $S = \{H, T\}$ এবং এখানে H, T প্রত্যেকেই এক একটা নমুনা বিন্দু।

১৪·২ যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়

উদাহরণ ১। মনে করি একটা নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো। 5 আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : একটা ছক্কা নিক্ষেপ করলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হচ্ছে : 1, 2, 3, 4, 5, 6। ছক্কাটি নিরপেক্ষ হলে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হবে। অর্থাৎ যেকোনো ফলাফল আসার সম্ভাবনা সমান। অতএব যেকোনো একটা ফলাফল আসার সম্ভাবনা ছয়ভাগের একভাগ। সুতরাং 5 আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$। আমরা এটাকে $P(5) = \frac{1}{6}$ এভাবে লেখি।

উদাহরণ ২। একটা নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপে জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : ছক্কা নিক্ষেপে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হচ্ছে : 1, 2, 3, 4, 5, 6. এদের মধ্যে 2, 4, 6 এই 3টি জোড় সংখ্যা। এই তিনটির যেকোনো একটা আসলে জোড় সংখ্যা হবে অর্থাৎ জোড় সংখ্যার অনুকূল ফলাফল 3 টা। যেহেতু ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য, তাই জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা হবে $\frac{3}{6}$। $\therefore$ $P(\text{জোড়সংখ্যা}) = \frac{3}{6}$.

তাহলে সম্ভাবনাকে এভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় :

$$\text{কোনো ঘটনার সম্ভাবনা} = \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}}$$

কোনো পরীক্ষণে কোনো ঘটনা ঘটার অনুকূল ফলাফল সর্বনিম্ন শূন্য এবং সর্বোচ্চ n(সমগ্র সম্ভাব্য ঘটনাবলি) হতে পারে।

যখন কোনো ঘটনার অনুকূল ফলাফলের মান শূন্য হয় তখন সম্ভাবনার মান শূন্য হয়। আর যখন অনুকূল ফলাফলের মান n হয়, তখন সম্ভাবনার মান 1 হয়। এ কারণে সম্ভাবনার মান 0 হতে 1 এর মধ্যে থাকে।

১৪·৩ দুটি বিশেষ ধরণের ঘটনা :

নিশ্চিত ঘটনা : কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা অবশ্যই ঘটবে একে নিশ্চিত ঘটনা বলে। নিশ্চিত ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার মান 1 হয়। যেমন, আগামীকাল সূর্য পূর্ব দিক থেকে উঠার সম্ভাবনা 1. আজ সূর্য পশ্চিম দিকে অস্ত যাবে এর সম্ভাবনাও 1. রাতের বেলায় সূর্য দেখা যাবে না এর সম্ভাবনা 1.

একটা মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় H অথবা T আসার সম্ভাবনাও 1. একটা ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনাও 1. এগুলির প্রত্যেকটি নিশ্চিত ঘটনা।

অসম্ভব ঘটনা : কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা কখনো ঘটবে না অর্থাৎ ঘটতে পারে না একে অসম্ভব ঘটনা বলে। অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা সব সময় শূন্য হয়।

যেমন আগামীকাল সূর্য পশ্চিম দিকে উঠবে অথবা সূর্য পূর্বদিকে অস্ত যাবে এর সম্ভাবনা শূন্য। তেমনি রাত্রে সূর্য দেখা যাবে এর সম্ভাবনাও শূন্য। তেমনটি ভাবে একটা ছক্কা নিক্ষেপে 7 আসার সম্ভাবনাও শূন্য। এখানে প্রত্যেকটি ঘটনাই অসম্ভব ঘটনা।

সম্ভাবনা নির্ণয়ের আরও উদাহরণ :

উদাহরণ ৩। একটা থলেতে 4টা লাল, 5টা সাদা ও 6টা কালো বল আছে। দৈবভাবে একটা বল নেয়া হলো। বলটি (i) লাল (ii) সাদা ও (iii) কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : থলেতে মোট বলের সংখ্যা $4 + 5 + 6 = 15$টি

দৈবভাবে একটা বল নেয়া হলে 15টি বলের যেকোনো একটি আসতে পারে। সুতরাং সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল $= 15$.

(i) ধরি লাল বল হওয়ার ঘটনা R। থলেতে মোট 4টা লাল বল আছে। এদের যেকোনো একটি আসলেই লাল বল হবে। সুতরাং লাল বলের অনুকূল ফলাফল $= 4$.

$$\therefore\ P(R) = \frac{\text{লাল বলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{4}{15}$$

(ii) বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা W ধরি। যেহেতু থলেতে 5টা সাদা বল আছে এবং এদের থেকে একটা বল আসলে সাদা বল হবে, সুতরাং সাদা বলের অনুকূল ফলাফল 5.

$$\therefore\ P(W) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

(iii) বলটি কালো হওয়ার ঘটনা B ধরি। থলেতে মোট 6টা কালো বল আছে এবং এদের থেকে একটা বল আসলেই কালো বল হবে। সুতরাং কালো বলের অনুকূল ফলাফল 6.

$$\therefore\ P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

কাজ :

১। একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো, নিম্নলিখিত সম্ভাবনাগুলো বের কর:
(i) 4 আসা (ii) বিজোড় সংখ্যা আসা (iii) 4 অথবা 4 এর বেশি সংখ্যা আসা
(v) 5 এর কম সংখ্যা আসা

২। একটি থলেতে একই ধরনের 6টি কালো, 5টি লাল, ৪টি সাদা মার্বেল আছে। থলে হতে একটি মার্বেল দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। নির্বাচিত মার্বেলটি–(i) লাল (ii) কালো (iii) হলুদ (iv) কালো নয়– সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর।

১৪·৪ তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়

যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়ে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হতে হয়। বাস্তবে সকল ক্ষেত্রে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হয় না। তাছাড়া অনেক ক্ষেত্রে সম্ভাবনার যুক্তিভিত্তিক সংজ্ঞার মতো কিছু গণনা করা যায় না। যেমন আবহাওয়ার পূর্বাভাসে বলা হচ্ছে আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা 30%, বিশ্বকাপ ফুটবলে ব্রাজিলের জয়ী হওয়ার সম্ভাবনা 40%, এশিয়া কাপ ক্রিকেটে বাংলাদেশের জয়ী হওয়ার সম্ভাবনা 60%, এসব সিদ্ধান্ত নেয়া হয় অতীতের পরিসংখ্যান হতে এবং এটাই হচ্ছে তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনার ধারণা।

ধরা যাক একটা মুদ্রা 1000 বার নিক্ষেপ করায় 523 বার হেড পাওয়া গেল। এ ক্ষেত্রে হেডের আপেক্ষিক গণসংখ্যা $\frac{523}{1000} = 0.523$। ধরা যাক মুদ্রাটিকে 2000 বার নিক্ষেপ করাতে 1030 বার হেড আসে। তাহলে 2000 বারের মধ্যে H এর আপেক্ষিক গণসংখ্যা $\frac{1030}{2000} = 0\cdot515$। এখান থেকে বোঝা যায় যে, পরীক্ষাটি ক্রমাগত চালিয়ে গেলে (পরীক্ষাটি যতবেশি বার করা যাবে) আপেক্ষিক গণসংখ্যার মানটি এমন একটি সংখ্যার কাছাকাছি হবে যাকে মুদ্রাটি একবার নিক্ষেপ করলে হেড আসার সম্ভাবনা হবে। একেই তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা বলা হয়।

উদাহরণ ৪ । আবহাওয়া দপ্তর থেকে পাওয়া রিপোর্ট অনুযায়ী জুলাই মাসে ঢাকা শহরে 21 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে ৪ই জুলাই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

সমাধান : যেহেতু জুলাই মাস 31 দিন এবং জুলাই মাসে 21 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে যেকোনো একদিন বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{21}{31}$। অতএব 8 জুলাই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{21}{31}$.

উদাহরণ ৫ । কোনো একটি নির্দিষ্ট এলাকায় জরিপে দেখা গেল 65 জন প্রথম আলো, 40 জন ভোরের কাগজ, 45 জন জনকণ্ঠ, 52 জন যুগান্তর পত্রিকা পড়ে। এদের মধ্য হতে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে তিনি যুগান্তর পত্রিকা পড়েন এর সম্ভাবনা কত? তিনি প্রথম আলো পড়েন না এর সম্ভাবনাও কত?

সমাধান : এখানে পত্রিকা পড়েন মোট $(65 + 40 + 45 + 52) = 202$ জন।
যুগান্তর পত্রিকা পড়েন 52 জন।

সুতরাং ঐ ব্যক্তির যুগান্তর পত্রিকা পড়ার সম্ভাবনা $\frac{52}{202}$.

প্রথম আলো পত্রিকা পড়েন 65 জন। সুতরাং প্রথম আলো পত্রিকা পড়েন না $(202 - 65) = 137$ জন।

$\therefore$ প্রথম আলো পত্রিকা পড়েন না এর সম্ভাবনা $= \frac{137}{202}$.

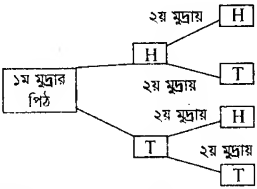
কাজ :
একটি জরিপে দেখা গেল কোনো এক বিশ্ববিদ্যালয়ে ১ম বর্ষে 284 জন ছাত্র অর্থনীতিতে, 106 জন ছাত্র ইতিহাসে, 253 জন ছাত্র সমাজবিজ্ঞানে, 169 জন ছাত্র ইংরেজিতে ভর্তি হয়েছে। একজন ছাত্রকে দৈবভাবে নির্বাচিত করলে নির্বাচিত ছাত্রটি সমাজবিজ্ঞানের ছাত্র হবে না এর সম্ভাবনা কত?

১৪·৫ নমুনা ক্ষেত্র এবং সম্ভাবনা Tree দ্বারা সম্ভাবনা নির্ণয়

আগেই বলা হয়েছে কোনো পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফলগুলো নিয়ে যে ক্ষেত্র তৈরি হয় তাকে নমুনা ক্ষেত্র বলে। অনেক পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্রের আকার বেশ বড় হয়। এসব ক্ষেত্রে নমুনা বিন্দু গণনা করা ও নমুনা ক্ষেত্র তৈরি করা সময় সাপেক্ষ এমনকি ভুল হওয়ার সম্ভাবনাও থাকে। সেক্ষেত্রে আমরা সম্ভাবনা tree (probability tree) এর সাহায্যে নমুনাক্ষেত্র তৈরি করতে পারি ও বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনাও বের করতে পারি।

উদাহরণ ৬। মনে করি, দুইটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একসাথে একবার নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি করতে হবে। প্রথম মুদ্রায় H এবং দ্বিতীয় মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান : দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করা যায়। প্রথম ধাপে একটা মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে অপর মুদ্রা নিক্ষেপও 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। তাই পরীক্ষার মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো হয়:



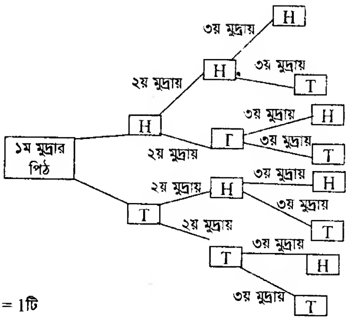
সম্ভাব্য নমুনা বিন্দুগুলো HH, HT, TH, TT.

তাহলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে {HH, HT, TH, TT}. এখানে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা 4 এবং প্রতিটি নমুনা বিন্দুর আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$। তাই প্রথম মুদ্রায় H ও দ্বিতীয় মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা হবে $P(HT) = \frac{1}{4}$.

উদাহরণ ৭। মনে করি তিনটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো। তিন নিরপেক্ষ মুদ্রা একসাথে একবার নিক্ষেপ করা হলে, Probability tree তৈরি করে নমুনা ক্ষেত্রটি দেখাও। তা হতে নিচের ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় কর :

(i) কেবল একটা টেল (ii) তিনটাই হেড (iii) কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা বের কর ।

সমাধান : প্রথমে মুদ্রা তিনটিকে তিনধাপ হিসেবে বিবেচনা করা এবং প্রতি ধাপে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। সুতরাং মোট ফলাফলকে Probabilty tree টাকে নিম্নভাবে দেখানো যায় :



তাহলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে : {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

এখানে মোট নমুনা বিন্দু 8টি এবং এদের যেকোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}$.

(i) একটি টেল পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো {THH, HHT, HTH} = 3টি

$\therefore$ $P(1T) = \frac{3}{8}$ (কেননা প্রতিটি নমুনা বিন্দুর ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}$)

(ii) তিনটিই হেড (H) পাওয়ার অনুকূল ঘটনা {HHH} = 1টি

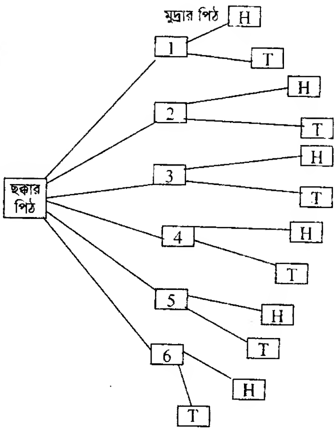
$\therefore P(HHH) = \frac{1}{8}$.

(iii) কমপক্ষে 1T পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো {HHT, HTH, THH, HTT, TTH, TTT} = 7 টি

$\therefore$ P[কমপক্ষে 1T] = $\frac{7}{8}$

উদাহরণ ৮। একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো। Probability tree তৈরি করে নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

সমাধান : একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে 6টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল {H অথবা T} আসতে পারে। তাই পরীক্ষায় মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যাবে:

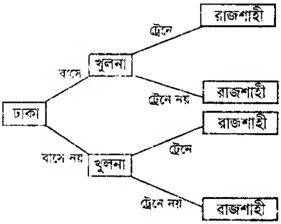


তাহলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে : {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}

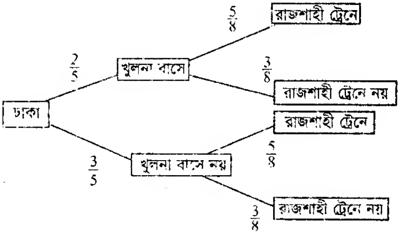
এখানে মোট নমুনা বিন্দু 12টি।

সুতরাং ছক্কায় 5 এবং মুদ্রায় H আসার সম্ভাবনা $P(5H) = \frac{1}{12}$.

উদাহরণ ৯। একজন লোক ঢাকা হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং খুলনা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$ ৷ লোকটি খুলনায় বাসে না যাওয়ায় এবং রাজশাহী ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা কত? Probability tree ব্যবহার করে দেখাও।



সম্ভাবনার মাধ্যমে Probability tree হবে



সুতরাং লোকটির খুলনায় বাসে না যাওয়ায় এবং রাজশাহীতে ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা

$$P(\text{খুলনা বাসে নয়, রাজশাহী ট্রেনে নয়}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}.$$

কাজ :

১। Probability tree এর সাহায্যে তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপে সকল সম্ভাব্য ফলাফল লেখ এবং নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি কর। এখান হতে (i) মুদ্রা 3টিতে একই ফলাফল (ii) কমপক্ষে 2T (iii) বড়জোড় 2T আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

২। একটি ছক্কা ও 2টি মুদ্রা নিক্ষেপ ঘটনার Probability tree তৈরি কর।

অনুশীলনী ১৪

১। একটি ছক্কা মারলে 3 ওঠার সম্ভাবনা কোনটি?

ক. $\frac{1}{6}$ খ. $\frac{1}{3}$

গ. $\frac{2}{3}$ ঘ. $\frac{1}{2}$

নিচের তথ্য থেকে (২-৩) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি থলিতে নীল বল 12টি, সাদা বল 16টি এবং কালো বল 20টি আছে। দৈবভাবে একটা বল নেওয়া হলো।

২। বলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ক. $\frac{1}{16}$ খ. $\frac{1}{12}$

গ. $\frac{1}{8}$ ঘ. $\frac{1}{4}$

৩। বলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ক. $\frac{1}{3}$ খ. $\frac{2}{3}$

গ. $\frac{1}{16}$ ঘ. $\frac{1}{48}$

নিম্নের তথ্য থেকে (৫-৬) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি মুদ্রাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হলো।

৪। সর্বাধিক বার H আসার সম্ভাবনা কত?

ক. 1 বার খ. 2 বার

গ. 3 বার ঘ. 4 বার

৫। সবচেয়ে কম সংখ্যক বার T আসার সম্ভাবনা কত?

ক. 0 খ. $\frac{1}{2}$

গ. 1 ঘ. 2

৬। চট্টগ্রাম আবহাওয়া অফিসের রিপোর্ট অনুযায়ী ২০১২ সালের জুলাই মাসের ১ম সপ্তাহে বৃষ্টি হয়েছে মোট 5 দিন। ঐ সপ্তাহে সোমবার বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ক. $\frac{1}{7}$ খ. $\frac{2}{7}$

গ. $\frac{5}{7}$ ঘ. 1

৭। 30টি টিকেটে 1 থেকে 30 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেয়া আছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেয়া হলো। টিকেটটি (i) জোড় সংখ্যা (ii) চার দ্বারা বিভাজ্য (iii) 8 এর চেয়ে ছোট (iv) 22 এর চেয়ে বড়- হওয়ার সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর।

৮। কোনো একটি লটারিতে 570টি টিকেট বিক্রি হয়েছে। রহিম 15টি টিকেট কিনেছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে প্রথম পুরস্কারের জন্য তোলা হলো। রহিমের প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

৯। একটা ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা ওঠার সম্ভাবনা কত ?

১০। কোনো একটি স্বাস্থ্য কেন্দ্রের রিপোর্ট অনুযায়ী কম ওজনের 155 শিশু, স্বাভাবিক ওজনের 386 শিশু এবং বেশি ওজনের 98 শিশু জন্ম নেয়। এখান হতে একটি শিশু দৈবভাবে নির্বাচন করলে নির্বাচিত শিশুটি বেশি ওজনের হবে এর সম্ভাবনা কত?

১১। দুই হাজার লাইসেন্স প্রাপ্ত ড্রাইভার এক বছরে নিম্নলিখিত সংখ্যক ট্রাফিক আইন ভঙ্গ করে:

ট্রাফিক আইন ভঙ্গের সংখ্যা	ড্রাইভারের সংখ্যা
0	1910
1	46
2	18
3	12
4	9
5 বা তার অধিক	5

একজন ড্রাইভারকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে ড্রাইভারটির 1টি আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত? ড্রাইভারটির 4এর অধিক আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত?

১২। কোনো একটি ফ্যাক্টরিতে নিয়োগকৃত লোকদের কাজের ধরন অনুযায়ী নিম্নভাবে শ্রেণিকৃত করা যায় :

শ্রেণি করণ	সংখ্যা
ব্যবস্থাপনায়	১৫৭
পরিদর্শক হিসেবে	৫২
উৎপাদন কাজে	১৪৭৩
অফিসিয়াল কাজে	২১৫

একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে লোকটি ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত? লোকটি ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত?

লোকটি উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় এর সম্ভাবনা কত?

১৩। 1টি মুদ্রা ও 1টি ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনায় Probability tree তৈরি কর।

১৪। Probability tree এর সাহায্যে নিচের ছকটি পূরণ কর :

মুদ্রা নিক্ষেপ	সকল সম্ভাব্য ফলাফল	সম্ভাবনা
একবার মুদ্রা নিক্ষেপ		P(T) =
দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপ		P(1H) = P(HT) =
তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ		P(HHT) = P(2H) =

১৫। কোনো একজন লোকের ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{9}$ এবং রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$. Probability tree ব্যবহার করে লোকটি ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে নয় এবং রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা কত বের কর। লোকটি রাজশাহী ট্রেনে কিন্তু খুলনা বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

১৬। একজন লোক ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{9}$, বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$ এবং প্লেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{9}$। লোকটির রাজশাহী হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$। Probability tree ব্যবহার করে লোকটির রাজশাহী ট্রেনে এবং খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

১৭। একটি দুই টাকার মুদ্রা চার বার নিক্ষেপ করা হলো। (এর শাপলার পিঠকে L এবং প্রাথমিক শিক্ষার শিশুর পিঠকে C বিবেচনা কর)

ক. যদি মুদ্রাটিকে চারবারের পরিবর্তে দুইবার নিক্ষেপ করা হয় তবে একটি L আসার সম্ভাবনা এবং একটি C না আসার সম্ভাবনা কত?

খ. সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree অঙ্কন কর এবং নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

গ. দেখাও যে, মুদ্রাটি n সংখ্যক বার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনা 2^n কে সমর্থন করে।

উত্তরমালা

অনুশীলনী ১.১

১ – ৪ নিজে কর :

৫। (a) $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
$B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(b) $C = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
$D = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

৬। (a) 8 (b) 56 এবং 24

৭। (a) 12 (b) 21, 21

৮। 7, 4 ৯। 0, 3 ১৮। ২ জন ১৯। (a) 4, (b) 6 (c) 28

২০। (a) 4 (b) 6 (c) 28 ২১। (a) 4 (b) 16, 7 (c) 9

২৩। (a) $A \cap B = \{x : 2 < x < 3, \ x \in R\}$
(b) $A \cap B = \{x : 1 \le x \le 3, \ x \in R\}$

২৪। (a) $A' \cap B = \{x : 4 < x < 6\}$
(b) $A \cap B' = \{x : 1 < x < 3\}$
(c) $A' \cap B' = \{x : x \le 4$ অথবা $x \ge 6\}$ ২৬। (i) 10% (ii) 50%

অনুশীলনী-১.২

৭। ক। (a) ডোম $S = \{1, 2, 3, 4\}$, রেঞ্জ $S = \{5, 10, 15, 20\}$

$S^{-1} = \{(5, 1), (10, 2), (15, 3), (20, 4)\}$,

(b) S ও S^{-1} প্রত্যেকে ফাংশন

(c) এক-এক ফাংশন

খ। (a) ডোম $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 3, 8\}$

$S^{-1} = \{(8, -3), (3, -2), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$,

(b) S ফাংশন; S^{-1} ফাংশন নয়, কেননা (0,1), (0,–1), (–3,8), (3,8), (–2,3), (2,3) প্রতিবিম্ব ভিন্ন নয়

(c) এক-এক ফাংশন

গ। (a) ডোম $S = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\}$, রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 2\}$

$S^{-1} = \{(0, \frac{1}{2}), (1, 1), (-1, 1), (2, \frac{5}{2}), (-2, \frac{5}{2}),$

(b) S ফাংশন নয়; কেননা $(1, 1)$, এবং $(1, -1), \leftarrow$ S^{-1} ফাংশন

(c) এক-এক ফাংশন

ঘ। (a) ডোম $S = \{-3, 1, 0, 3\}$, রেঞ্জ $S = \{-3, -1, 0, 3\}$

$S^{-1} = S$

(b) S, S^{-1} ফাংশন

(c) এক-এক ফাংশন নয়

ঙ। (a) ডোম $S = \{2\}$, রেঞ্জ $S = \{1, 2, 3\}$

$S^{-1} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

(b) S ফাংশন নয়

(c) এক-এক ফাংশন নয়

৮। (ক) 0, 2, 3 (খ) [a]

(গ) 26 (ঘ) $1 + y^2$

৯। (ক) ডোম $F = R$, এক-এক

(খ) ডোম $F = R$, এক-এক নয়

১৬। (ক) $F(x+1) = 2x+1,\ F\left(\frac{\;}{2}\right) = 0$

(খ) এক-এক

অনুশীলনী ২

৬। (ক) $Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \dots\dots\dots + a^{n-1}$

(খ) $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

৭। $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

৯। (i) $(x+1)^2(x+2)(x+3)$

(ii) $(2a-1)(a+1)(a+2)(2a+1)$

(iii) $(x+1)(x^2+x+1)$

(iv) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$

(v) $-(x-y)(y-z)(z-x)$

(vi) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

১২। (a) 1 (b) $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ (c) 0 (d) $\dfrac{1}{x-1}$

১৩। (a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x+2}$ (b) $\dfrac{6}{x-4} - \dfrac{5}{x-3}$ (c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+3}$

(d) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{7x-27}{x^2+4} - \dfrac{2}{x+1}\right)$ (e) $\dfrac{1}{25(x+1)} + \dfrac{12}{25(x+3)} - \dfrac{9}{5(x+3)^2}$

অনুশীলনী ৫.১

১। $-3,\ -\frac{3}{2}$ ২। $-1+\frac{\sqrt{10}}{2},\ -1-\frac{\sqrt{10}}{2}$ ৩। $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$

৪। $\frac{1}{4}\left(5-\sqrt{33}\right), \frac{1}{4}\left(5+\sqrt{33}\right)$ ৫। $\frac{1}{6}\left(-7-\sqrt{37}\right), \frac{1}{6}\left(-7+\sqrt{37}\right)$

৬। $\frac{1}{6}\left(9-\sqrt{105}\right). \frac{1}{6}\left(9+\sqrt{105}\right)$ ৭। 4, 4 ৮। $\frac{1}{4}\left(-7-\sqrt{57}\right), \frac{1}{4}\left(-7+\sqrt{57}\right)$

৯। $\frac{1}{3}$, 2

অনুশীলনী ৫.২

১। 13 ২। $\frac{6}{5}$ ৩। 9 ৪। 5 ৫। 5 ৬। $\frac{5}{2}, \frac{13}{2}$, ৭। 1, 5

৮। $2, -\frac{9}{2}$, ৯। $\frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$ ১০। $-\frac{9}{11}, -\frac{3}{2}$

অনুশীলনী ৫.৩

১। 2 ২। $\frac{7}{3}$ ৩। 6 ৪। 5 ৫। 2 ৬। $\frac{5}{2}$, ৭। 3 ৮। 0.

৯। 0, 2 ১০। −1, 0 ১১। $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ১২। 2, 3

অনুশীলনী ৫.৪

১। $(2, 3), \left(\frac{15}{2}, \frac{16}{9}\right)$ ২। $(3, 4), \left(-6, \frac{5}{8}\right)$ ৩। (0, 0), (13. 13), (3. - 2), (-2, 3)

৪। (0, 0), (5. 5), (2. -1), -1, 2) ৫। $\left(\frac{1}{5}, 5\right), \left(\frac{4}{5}, 20\right)$ ৬। $\left(3, -\frac{5}{3}\right), \left(\frac{16}{9}, -\frac{3}{4}\right)$

৭। (1,2), (-1, -2) ৮। $(7,5), (-7,-5), (\sqrt{2}, -6\sqrt{2}), (-2, 6\sqrt{2})$

৯। (3, 4), (4; 3), (-3, -4), (-4, -3)

১০। (2, 1), 2, -1), (-2, 1), (-2, -1) ১১। (1, -2), (2, -1), -1, 2), (-2, 1)

১২। $(1, 3), (-1, -3), \left(\frac{13}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right), \left(\frac{-13}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}\right)$

অনুশীলনী ৫.৫

১। 16 মিটার, 15 মিটার ২। 13, 9 ৩। দৈর্ঘ্য 8 মিটার, প্রস্থ 6 মিটার ৪। 19 ৫। দৈর্ঘ্য 6 মিটার, প্রস্থ 4 মিটার অথবা দৈর্ঘ্য 16 মিটার, প্রস্থ $1\frac{1}{2}$ মিটার ৬। দৈর্ঘ্য 25 মিটার, প্রস্থ 24 মিটার ৭। দৈর্ঘ্য 8 মিটার, প্রস্থ 6 মিটার ৮। 36 ৯। $8\sqrt{3}$ মিটার ১০। দৈর্ঘ্য 20 মিটার, প্রস্থ 15 মিটার ।

অনুশীলনী ৫.৬

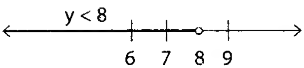
(x, y) যথাক্রমে সমান :

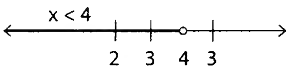
১। $(2, 3)$ ২। $(2, 1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ৩। $(4, 0)$ ৪। $(1, 2)$ ৫। $(3, 3)$

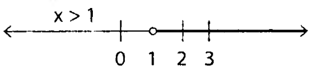
৬। $(2, \pm 2), \left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$ ৭। $(2, \pm 2), \left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$ ৮। $(1, 2)\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

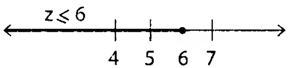
৯। $(2, \pm 2), \left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$

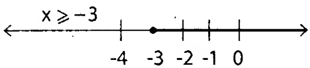
অনুশীলনী ৬.১

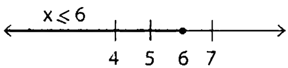
১। 

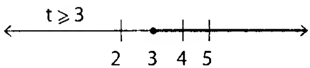
২। 

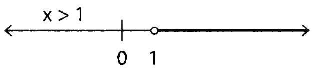
৩। 

৪। 

৫। 

৬। 

৭। 

৮। 

অনুশীলনী ৬.২

১। $3x + \frac{x+2}{2} < 29, 0 < x < 8$ ২। $4x + x - 3 \leq 40, 3 < x < \frac{43}{5}$

৩। $7x + 20x < 500, 0 < x < 5$ ৪। $\frac{x + x + 120}{9} \leq 100; 0 < x \leq 390$

৫। $5x < 40, 5 < x < 8$ ৬। পিতার বয়স ≤ 42 বছর

৭। জেনির বর্তমান বয়স x বছর হলে, $14 < x < 17$ ৮। সময় + সেকেণ্ড হলে, $+ \geq 50$

৯। উড্ডয়নের সময় + ঘণ্টা হলে, $+ \geq 6\frac{1}{4}$ ১০। উড্ডয়নের সময় + ঘণ্টা হলে, $+ \geq 5$

১১। সংখ্যাটি x হলে, $0 < x < 5$

অনুশীলনী ৭

৮। (ক) $20,\ 30,\ 2r$ (খ) $5,\ \frac{15}{2}, \frac{r}{2}$ (গ) $\frac{1}{110}, \frac{1}{240}, \frac{1}{r(r+1)}$

(ঘ) $1,\ 0, 1$ (r জোড় হলে) এবং 0 (r বিজোড় হলে)

(ঙ) $\frac{5}{3^9}, \frac{5}{3^{14}}, \frac{5}{3^{r-1}}$ (চ) $0,\ 1, \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$

৯। (ক) $n > 10^6$ (খ) $n < 10^6$ (গ) o

১১। (ক) 2 (খ) $\frac{1}{7}$ (গ) $\frac{32}{3}$ (ঘ) সমষ্টি নেই (ঙ) $\frac{1}{3}$

১২। (ক) $\frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$ (খ) $\frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

১৩। শর্ত $x < -2$ অথবা $x > 0$; সমষ্টি $= \frac{1}{x}$

১৪। (ক) $\frac{3}{11}$ (খ) $\frac{2303}{999}$ (গ) $\frac{41}{3330}$ (ঘ) $3\frac{403}{9990}$

অনুশীলনী ৮.১

১। (ক) (i) $75^\circ 30'$ (ii) $55^\circ 54' 53''$ (iii) $33^\circ 22' 11''$

(খ) (i) $110^\circ 46' 9 \cdot 23''$ (ii) $75^\circ 29' 54 \cdot 5''$ (iii) $55^\circ 54' 53 \cdot 35''$

৩। $12 \cdot 7549$ মি. (প্রায়) ৪। 57 কি.মি./ঘণ্টা (প্রায়) ৫। $\frac{\pi}{5}$ রেডিয়ান, $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

৬। $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$ ৭। 562 কি.মি. (প্রায়) ৮। $1,135 \cdot 4$ কি.মি. (প্রায়)

৯। $4 \cdot 78$ মি./সে. (প্রায়) ১০। 1 কি.মি. (প্রায়) ১১। $1 \cdot 833$ রেডিয়ান (প্রায়)

১২। $114 \cdot 59$ মিটার (প্রায়) ১৩। 1745 মি. (প্রায়) বা $1 \cdot 75$ মি. (প্রায়)

অনুশীলনী ৮.২

১। (i) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (ii) 2

২। $\tan\theta = \frac{3}{4}, \sin\theta = -\frac{3}{5}$

৩। $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan A = -2$

৪। $\sin A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \sqrt{3}$

৫। $\sin A = -\frac{-5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$ ৯। $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

১২। (i) $\frac{27}{4}$ (ii) $\frac{17}{12}$ (iii) $\frac{5}{8}$ (iv) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ১৩। 2

অনুশীলনী ৮.৩

৭। (i) 0 (ii) 0 (iii) অসংজ্ঞায়িত (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (v) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (vi) অসংজ্ঞায়িত

(vii) $-\frac{1}{2}$ (viii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

৯। (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 2 (v) 2

১১। (i) $\frac{11\pi}{6}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{4}$

১২। (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{6}$ বা $\frac{\pi}{3}$ (v) $\frac{\pi}{3}$

১৩। (i) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

(iv) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (v) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

(vi) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ (vii) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

অনুশীলনী ৯.১

৫। (ক) x (খ) $\frac{\sqrt{a}}{B}$ (গ) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ (ঘ) 1 (ঙ) 1 (চ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

৮। (ক) 1 (খ) 0 (গ) 3 : 2

৯। (ক) 0 (খ) $x = 1, y = 1$ (গ) $x = 2, y = -2$ (ঘ) $x = -1, y = 1$

অনুশীলনী ৯.২

৮। (ক) 1.01302 (খ) 19995.62 ৯। (ক) 9.2104 (খ) –4.90779 (গ) 230.76

১১। (ক) $x = \log(1-y)$, $\log a < y < 1$ (খ) $x = 10^y$, $-a < y < a$

(গ) $x = \sqrt{y}$, $0 < y < a$

১২। $D_f = (2, \infty)$, $R_f = R$

১৪। (ক) $D_f = [-5, 5]$, $R_f = [0, 5]$ (খ) $D_f = [-2, 2]$, $R_f = [0, 4]$

(গ) $D_f = (-5, 5)$, $R_f = R$

অনুশীলনী ১০.১

১। $1 + 5y - 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$

(i) $1 - 5y + 10y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5$

(ii) $1 - 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$

২। (a) $1 + 24x + 240x^2 + 1280x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) $1 - 21x + 189x^2 - 945x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

৩। (a) $1 + 8x + 28x^4 + 56x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ এবং $1 \cdot 082856$

৪। (a) $1 - 10x + 40x^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) $1 + 27x + 324x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(c) $1 + 17x + 94x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

৫। (a) $1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 \ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) $1 + \frac{8}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{32}{x^3} \ldots\ldots\ldots\ldots$

(c) $1 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{35}{8} \cdot \frac{1}{x^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

৬। (a) $1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) $1 + 12x + 604x^2 + 160x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(c) $1 + 6x + 3x^2 - 40x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

অনুশীলনী ১০.২

১০। (a) $32 + 80x^2 + 80x^4 + 40x^6 + 10x^8 + x^{10}$

(b) $64 - \frac{96}{x} + \frac{60}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{15}{4x^4} - \frac{3}{8x^5} + \frac{1}{64x^6}$

১১। (a) $64 + 576x + 2160x^2 + 4320x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) $1024 - \frac{640}{x} + \frac{160}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

১২। $p = 2$, $r = 64$, $s = 60$ ১৩। 7 ১৪। $64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

১৫। $31 \cdot 2080$ ১৬। $n = 8$, পদসংখ্যা 9 ও মধ্যপদ $\frac{35}{128}$ ১৭। (a) $x = \pm 6$ (b) $k = 2$

অনুশীলনী ১১.১

১। (i) $\sqrt{13}$ একক (ii) $4\sqrt{2}$ একক (iii) $(a-b)\sqrt{2}$ একক (iv) 1 একক (v) $\sqrt{13}$ একক
৫। $k=-5, 5$ ৬। 16·971 (প্রায়) ৯। B নিকটবর্তী, A দূরবর্তী

অনুশীলনী ১১.২

১। (i) 7 একক, $4\sqrt{2}$ একক, 5 একক, $12+4\sqrt{2}$ একক (ii) 14 বর্গ একক
২। (i) 6 বর্গ একক (ii) 24 বর্গ একক
৩। $\sqrt{58}$ একক, $\sqrt{10}$ একক, 11·972 একক ৪। a^2 বর্গ একক
৫ 10 একক, 10 একক, 40 বর্গ একক
৬। $a=5$, হলে $\frac{119}{2}$ বর্গ একক ৭। $a=2$, $5\frac{1}{3}$ $a=15$, হলে $\frac{109}{2}$ বর্গ একক

a=2 হলে, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী AC অতিভুজ এবং $\angle BAC$ সমকোণ
৮। (i) 21 বর্গ একক (ii) 24 বর্গ একক (iii) 15 বর্গ একক ১০। $P=\frac{59}{5}$

অনুশীলনী ১১.৩

১। (ক) -1 (খ) $\frac{3}{2}$ (গ) 0 (ঘ) 2 ২। 5 ৪। 1, $\frac{1}{2}$ ৫। 1, 2

অনুশীলনী ১১.৪

১০। $y=2x-5$ ১১। (a) $y=-x+6$ (b) $y=x-3$ (c) $y=3x-3a$
১২। (a) $y=3x-5$ (b) $y=-3x-5$ (c) $y=3x+5$ (d) $y=-3x+5$
১৩। (a) $(1,0);(0,3)$ (b) $\left(-\frac{6}{5},0\right);(0,3)$ (c) $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right);(0,-1)$
১৪। $y=k(x-k); k=2,3$ ১৫। $y=\frac{1}{k}(x+k); k=-1,2$ ১৬। $k=\frac{11}{2}$

অনুশীলনী- ১৩

৭। 636 বর্গ মি., 20.5 মি., 864 ঘন মি. ৮। 1 ঘন মি., 7.8 বর্গ মি. ৯। 300 বর্গ সে. মি. (প্রায়) ১০। 8.75 মি.. 3.2 মি. ১১। 188.5 বর্গ সে. মি. (প্রায়), 301.6 ঘন সে. মি. (প্রায়), ১২। 25 সে. মি. (প্রায়) ১৩। 64.14 ঘন সে. মি. (প্রায়) ১৪। 452.39 বর্গ সে. মি. (প্রায়), 904.8 ঘন সে. মি. (প্রায়) ১৫। 1 সে. মি. ১৬। 11.37 সে. মি. (প্রায়) ১৭। 1.06 সে. মি. (প্রায়) ১৮। ৪টি ১৯। 1308.82 ঘন সে. মি. (প্রায়) ২০। 78.5 বর্গ সে. মি. (প্রায়) ২১। 7.48 বর্গ মি. (প্রায়) ২২। 83800টি ২৩। 16 সে. মি., 12 সে. মি., 12 সে. মি. ২৪। 2086.49 বর্গ মি. (প্রায়) ২৫। 798 বর্গ সে. মি., 1550 ঘন সে. মি. ২৬। 203.14 বর্গ সে. মি., 207.85 ঘন সে. মি. ২৭। 296.38 বর্গ সে. মি., 311.77 ঘন সে. মি. ২৮। 110.85 বর্গ সে. মি., 60.34 ঘন সে. মি. ২৯। 40.65 বর্গ সে. মি., 16 ঘন সে. মি. ৩০। 4662.86 ঘন সে. মি.

অনুশীলনী ১৪

৭। (i), $\frac{1}{2}$ (ii), $\frac{7}{30}$ (iii), $\frac{7}{30}$ (iv) $\frac{4}{15}$ ৮। $\frac{1}{38}$ ৯। $\frac{2}{3}$ ১০। $\frac{98}{639}$
১১। $(i)\frac{23}{1000}$ (ii) $\frac{1}{400}$ ১২। (i) $\frac{157}{1897}$ (ii) $\frac{1630}{1897}$ (iii) $\frac{424}{1897}$ ১৫।(i) $\frac{8}{63}$ (ii) $\frac{25}{63}$ ১৬। $\frac{4}{45}$